

任選五題，每題20分，請勿超選，並標明所選題號

20 % 1. 用數值計算法求一給定數 $c(c \geq 0)$ 之平方根時，可用下列公式

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{c}{x_n} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

並令起始值為任一正數 x_0 滿足 $x_0^2 \geq c$ ，且 $x_0^2 \leq 1$ (若 $c \leq 1$)，
 $(x_0 - 1)^2 \leq c$ (若 $c > 1$)。

(5%) (i) 試証(1)式合乎牛頓近似解法(Newton's method)

(5%) (ii) 試証 x_n 會收斂並收斂至 \sqrt{c}

(10%) (iii) 若要求 \sqrt{c} 準確到小數第六位， n 需多大？

(提示 $2^{10} = 1024 \approx 10^3$)

20 % 2. 假定某特定區域內在時間 t 時之某種細菌之個數為 $N(t)$ 。因 $N(t)$ 甚大，我們可假定 $N(t)$ 與 t 均為連續變數。根據生物繁殖的規律，假定其繁殖率，即 $\frac{dN(t)}{dt}$ ，與其現在個數及環境中剩餘資源之乘積成正比，而環境中剩餘資源可以 $a - bN(t)$ 表示之，式中 a 與 b 均為已知常數且 $a \gg b$ 又設 $N(0) = 1$ 。

(5%) (i) 試以微分方程式表示 $N(t)$ 與 t 之關係(比例常數可假定為 k)

(8%) (ii) 試解此微分方程式

(7%) (iii) 試在 $a = 10^4$, $b = 10^{-2}$, $k = 10^{-4}$ 時繪 $N(t)$ 與 t 關係之草圖，(座標尺度須標明； $e^{-2.3} \approx 10^{-1}$)

20 % 3. 設 M 為一 $(n + m) \times (n + m)$ 之矩陣，今將其分割下列之四個子矩陣

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix},$$

式中 M_{11} 為一 $m \times m$ ，而 M_{22} 為一 $n \times n$ 之矩陣，今以 $|A|$ 表矩陣 A 之行列式值。

八十四學年度 生命科學 所 乙 組碩士班研究生入學考試

科目：應用數學 科號1007 共4頁第2頁 *請在試卷【答案卷】內作答

(7%) (i) 若 M_{11}^{-1} 存在，試證 $|M| = |M_{11}| |M_{22} - M_{21} M_{11}^{-1} M_{12}|$

(5%) (ii) 令 I_k 為一 $k \times k$ 之 identity 矩陣，又令 A
為一 $m \times n$ ， B 為一 $n \times m$ 之矩陣，試證

$$|I_m + AB| = |I_n + BA|$$

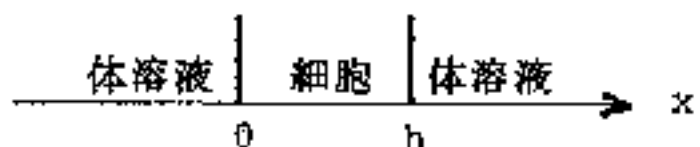
(7%) (iii) 用上題所定義之 A, B ，試證 AB 與 BA 有相同異於 0 之特徵值，並以一例証實 AB 與 BA 之 0 特徵值可以不同。

(提示：可用 (i) 証 (ii)，(ii) 証 (iii)。若前式証不出仍假定其為一知結果而用以証明後式。)

20% 4. 粒子擴散在細胞中及生物體溶液中佔重要地位，今為簡單起見，只考慮其一度空間之模型，如圖所示，假定 $c(x, t)$ 為細胞中在 x 位置， t 時之粒子濃度，由擴散公式可知 $c(x, t)$ 滿足

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

細胞膜 細胞膜



(5%) (i) 試敘述此偏微分方程式如何導出 (直覺的簡述即可)

(15%) (ii) 若令體溶液之濃度恆定為 c_0 且細胞長度為 h ，又設此細胞膜極薄因而對所有的 $t > 0$ ，

$$c(0, t) = c(h, t) = c_0.$$

且在 $t = 0$ 時，此細胞 (菌) 剛放入此溶液。因此 $c(x, 0) = 0, 0 < x < h$ 。試解 $c(x, t)$ 。

八十四學年度 生命科學 所 乙 組碩士班研究生入學考試

科目：應用數學 科號 1007 共 4 頁第 3 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

- 20 % 5. (10%) (a) 1994年6月20日綠色消費者基金會公布美國國會聽證會之文件，謂每座核電廠反應爐每年爐心嚴重熔毀之機率為萬分之三，則美國一百座核電廠未來20年內至少產生一次爐心嚴重熔毀之機率大約為多少？並將你所需的假設列出。
- (10%) (b) 台灣有三座核電廠共六座反應爐。未來20年內至少發生一次爐心嚴重熔毀之機率大約為多少？

如有需要，你可利用下列之數值：

$$(e^{-0.6} = 0.549, e^{-0.0036} = 0.965, e^{-1} = 0.368, e^{-0.3} = 0.741.)$$

20 % 6. 假設現在想知道清華5000個同學每月平均的花費，張三取了一組樣本，得估計值6000元，且知其為不偏估計及標準差為1000元。李四另外得到一個不偏估計值7000元，但其標準差為2000元。現在的問題是要如何將這二個結果綜合起來得到平均花費的較佳估計值。

- (5%) (a) 甲認為因李四的標準差較大，故應捨棄李四的樣本，而採用張三的結果，你認為合理嗎？
- (5%) (b) 乙認為將張三的資料與李四的資料取其平均值6500元即可，你認為合理嗎？
- (5%) (c) 丙認為既然李四的標準差較大，它的結果比重應較低（給予1/3比重）張三的結果比重應較高（給予2/3比重）故估計值成為 $\frac{2}{3} \times 6000 + \frac{1}{3} \times 7000$ ，你認為合理嗎？
- (5%) (d) 你能不能用張三與李四的數據，找到一個更好的估計方法？

(答案除“是”或“不是”外，應包含理由。)

科目：應用數學 科號 1007 共 4 頁第 4 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

20 % 7. 下表為台灣二個職業族羣 (A 和 B) 各年齡層之某年死亡人數，族羣人口數及每千人之死亡率：

職業 A

年齡	死亡人數	族羣人數	死亡率/千人
30-39	9	16,801	0.54
40-49	10	7,001	1.43
50-59	19	3,891	4.88
60-69	12	1,642	7.31
總和	50	29,335	1.70

職業 B

年齡	死亡人數	族羣人數	死亡率/千人
30-39	6	15,758	0.38
40-49	29	22,366	1.30
50-59	173	46,407	3.73
60-69	241	53,424	4.51
總和	449	137,955	3.25

- (15%) (a) 就死亡總數而言，職業 A 之總死亡率為 1.70/ 千人，職業 B 其總死亡率為 3.25/ 千人。B 較 A 之總死亡率為高，但在每一個年齡層中，職業 A 之死亡率均較 B 為高，為何會有如此看似矛盾現象？簡單扼要說明。
- (5%) (b) 我們是否有足夠的證據說職業 A 比職業 B 的死亡率高？試以 60-69 年齡族羣為例來支持你的答案。