

八十五學年度 統計 所 _____ 組碩士班研究生入學考試

科目： 基礎數學 科號 0301 共 2 頁第 1 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

1. (10%) 求積分

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{1}{x^2 \sqrt{2-x^2}} dx.$$

2. (10%) 求無窮級式 $\sum_{j=1}^{\infty} j^2 x^j$, $0 < x < 1$, 之和。

3. (10%) 令 $f(x, y, z) = x^2 y^3 e^z$, C 代表曲線 $\sigma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, 求線積分 (Line integral)

$$\int_C \nabla f \cdot d\sigma$$

4. (10%) 在三度空間裡求直線 $L(t) = (4+t, 4-t, \frac{1}{2})$, $-\infty < t < \infty$, 與拋物面 $z = x^2 + y^2$ 間最短距離。

5. (10%) 求拋物面 $z = x^2 + y^2$ 在 $z \leq 1$ 範圍內的表面積。

6. (i) 5% 令 X 為一全秩 (full rank) $n \times p$ 矩陣, $p \leq n$; S 為由 X 之行向量 (或列向量) 所生成之空間, 請寫出 n -維向量 y 在 S 上之射影。

(ii) 5% 敘述 Gram-Schmidt 垂直化過程。

(iii) 10% 若 $p = 3$, $X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix}$, x_i 不全同, 請用 Gram-Schmidt 過程求 S 之一組標準基底 (orthonormal basis)。

八十五學年度 統計 所 組碩士班研究生入學考試

科目：基礎數學 科號 0301 共 2 頁第 2 頁 * 請在試卷【答案卷】內作答

7. (i)5% 何謂正定矩陣(positive definite matrix) ?
- (ii)5% 若 $A = (a_{ij})$ 為 n 階正定矩陣，證明 A 之固有值(eigenvalue)皆正，並以 A 之固有值及固有向量(eigenvector)表示 A^{-1} 。
8. 設 $A = (a_{ij})$ 為一 $n \times n$ 矩陣滿足 $a_{ij} > 0, \forall i, j$ ，且 $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1, \forall j$ 。
- (i)5% 證明 1 為 A 之單一固有值。
- (ii)5% 證明 $\lim_{m \rightarrow \infty} A^m$ 存在。
- (iii)5% 令 $L = \lim_{m \rightarrow \infty} A^m$ ，證明 $AL = LA = L$ ，且 L 之各行皆為對應於固有值 1 的固有向量，稱作 v 。
- (iv)5% 任意 n 維 $X = (x_1, \dots, x_n)'$ ，若 $x_i > 0 \forall i$ 且 $\sum_{i=1}^n X_i = 1$ ，則 $\lim_{m \rightarrow \infty} A^m X = v$ 。