

八十五學年度 統計 所 組碩士班研究生入學考試

科目： 統計學 科號 0303 共 3 頁第 1 頁 \*請在試卷【答案卷】內作答

1. 設  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是獨立且具同一分配之正數隨機變數，又設

$$E(X_i) = \mu, \quad \text{Var}(X_i) = \sigma^2$$

$i = 1, 2, \dots, n, 0 < \mu, \sigma^2 < \infty$ 。請說明下述每一個聲明是否正確：

- 5% (a) 統計量  $t(X_1, X_2, \dots, X_n) = X_1$  能依 Blackwellization 過程改善為一個較好  $\mu$  之估計量。
- 5% (b)  $\mu$  之不偏估計量的變異數之 Cramer-Rao bound 下限為  $\mu^2/n$ 。
- 5% (c)  $\ln \bar{X}$  為  $\ln \mu$  之最小變異不偏估計量 (MVUE)。
- 5% (d)  $\ln X$  為  $\ln \mu$  之一致 (consistent) 估計量。
2. 隨機選出 60 人來評估一個新的減肥計劃。這 60 人試驗前之平均體重為 170 磅而有 17 磅之標準差。經過試驗後，其平均體重為 162 磅且有 12 磅之標準差。經過試驗後，其平均體重改變為減 8 磅且有 6 磅之標準差。設試驗前後之體重皆具有常態分配
- 10% (a) 若有人對這一減肥計劃有興趣，試求一區間使他相信他的體重改變有 90% 的機會包含在這一區間中。
- 5% (b) (a) 中所求之區間的計算需要假設試驗前及後之體重是常態分配嗎？
- 5% (c) 設體重改變的期望值與參加該減肥計劃時之體重有關。當一新人之體重為 181 磅時，試略述如何求 (a) 之區間。

3. 假設動物的腦髓重量 ( $\lambda$ ) 與體重 ( $\tau$ ) 有下列的關係式

$$\tau = \gamma_0 + \gamma_1 \lambda.$$

由于某些因素 (如測量誤差)，我們無法測得真正的動物腦髓及身體重量。相反地，我們可以測量到  $X = \lambda + \delta$  和  $Y = \tau + \epsilon$ ，其中  $\delta$  和  $\epsilon$  代表測

八十五學年度 統計 所 組碩士班研究生入學考試

科目： 統計學 科號 0303 共 3 頁第 2 頁 \* 請在試卷【答案卷】內作答

量誤差。現假設我們有  $n$  種動物的腦髓及身體測量重量  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  且  $\lambda_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(u, \sigma_\lambda^2)$ ,  $\delta_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma_\delta^2)$  和  $\varepsilon_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma_\varepsilon^2)$  為三個獨立的數列隨機變數。

- 5% (a) 若使用  $\hat{r}_1 = \frac{S_{XY}}{S_X^2}$  來估計  $r_1$ ，其中  $\bar{X} = \sum_1^n X_i/n$ ,  $\bar{Y} = \sum_1^n Y_i/n$ ,  $S_X^2 = \sum_1^n (X_i - \bar{X})^2/n$ ,  $S_{XY} = \sum_1^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})/n$ ，則這個估計量是否具有一致性(consistency)？(註：若只猜答案不給理由或證明，則這小題不給分！)
- 5% (b) 又  $E(\lambda_i | X_i)$  是什麼分佈？
- 5% (c) 若我們可以將  $Y_i = r_0 + r_1 \lambda_i + \varepsilon_i$  改寫成  $Y_i = r_0^* + r_1^* X_i + \varepsilon_i^*$ ，則  $r_0^* = ?$   $r_1^* = ?$   $\varepsilon_i^* = ?$ 。
- 10% (d) 某個動物學家有下列（共八種）的數據：

動物種類	樹蹄兔	棕蝙蝠	地松鼠	栗鼠
腦髓重量(X) (公斤)	2	0.023	0.101	0.425
身體重量(Y) (公斤)	12.3	0.3	4.0	6.4

動物種類	幾內亞小豬	海狸	夜猴	寒帶狐
腦髓重量(X) (公斤)	1.04	1.35	0.48	3.385
身體重量(Y) (公斤)	5.5	8.1	15.5	44.5

這些數據是否告訴你動物腦髓重量和體重之間存有任何關係？( $P(t(6) \leq 2.447) = P(t(8) \leq 2.306) = 0.975$ ,  $S_X^2 = 1.137$ ,  $S_Y^2 = 169.781$ ,  $S_{XY} = 12.019$ )。

4. 假設我們有一個連續型隨機變數的觀測值  $X$ 。它的機率密度函數可能為  $f_0$  或  $f_1$ ，其中

$$f_0(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad f_1(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

八十五學年度 統計 所 組碩士班研究生入學考試

科目： 統計學 科號 0303 共 3 頁第 3 頁 \*請在試卷【答案卷】內作答

- 10% (a) 試找出一個檢定方法 (test procedure)  $\delta$  使得  $2\alpha(\delta) + \beta(\delta)$  的值達到最小，其中  $\alpha(\delta)$  及  $\beta(\delta)$  分別代表  $\delta$  的 Type-I 及 Type-II error。（須說明尋找過程）
- 10% (b) 在顯著水準為 0.05 之下，試檢驗  $f_0$  及  $f_1$  何者為正確的機率密度函數？

- 15% 5. 一個包含 350 位男性的樣本被從某一特定母體羣中抽出，並依據其抽煙情況 (smoking habits) 和社會經濟地位 (socio-economic status) 歸類為下表：

		社會經濟地位		
		高	中等	低
抽煙情況	從不抽煙	70	20	10
	以前抽煙	90	20	30
	現在抽煙	50	20	40

依據這組資料，在此特定母體羣中男性的抽煙情況是否與其社會經濟地位具有關連性？ $(P(\chi^2(9) \leq 16.92) = P(\chi^2(6) \leq 12.59) - P(\chi^2(4) \leq 9.49) = 0.95)$