

國立清華大學命題紙

九十一學年度 統計學研究所 (所) _____ 組碩士班研究生招生考試

科目 統計學 科號 0303 共 3 頁第 1 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

一、下列數據為某公司 A, B 二條生產線過去 10 天所生產之不良品總數:

Line A	117	121	128	135	139	140	142	143	148	151
Line B	129	131	137	137	144	149	150	152	153	167

- (a) 試繪出 A, B 二條生產線所生產之不良品的 box-and-whisker plots, 並比較此二條生產線之不良品是否有顯著差異? (5 分)
- (b) 試求 A, B 二組資料之 inter-quartile range; 此二組資料應如何轉換, 方可使轉換後之 inter-quartile range 近似相等。(5 分)

二、 \bar{X} 表示從母群體 A 抽出 125 隨機觀測值之樣本平均數, \bar{Y} 表示從母群體 B 抽出 100 隨機觀測值之樣本平均數。若母群體 A 及 B 之機率分配分別表示如下:

$$f_A(x) = 1/3; \quad x \in \{2, 3, 7\}$$

$$f_B(1) = 2/3; f_B(3) = 1/3$$

試計算 $P(1.84 \leq (\bar{X} - \bar{Y}) \leq 2.63)$ 。(10 分)

三、(a) 何謂 BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*)? (2 分)

(b) 何謂 UMVE (*Unbiased Minimum Variance Estimator*)? (2 分)

(c) 已知 (X_1, \dots, X_n) 為一組從某母群體抽出之隨機樣本, 若此母群體之平均數 (*mean*) 為 μ 且變異數 (*variance*) 為 σ^2 , 試求未知參數 μ 之 BLUE, 並證明之。(7 分)

(d) 若此母群體之機率分配服從一 $U(0, \theta)$, 試求 μ 之 UMVE。(7 分)

(e) 若此母群體之機率分配服從 Poisson (μ), 試求 $e^{-\mu}$ 之不偏估計量。(2 分)

國立清華大學命題紙

九十一學年度 統計學研究所 (所) _____ 組碩士班研究生招生考試

科目 統計學 科號 0303 共 3 頁第 3 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

(b) 在 $\alpha = 0.05$ 下，若採用成對樣本 (paired-sample) 分析法，試問此二種品牌輪胎之耐磨性是否有顯著差異？(已知 $t_{0.025}(4) = 2.776$) (6 分)

(c) 試問何種分析方法較合理？理由為何？(3 分)

六、已知人的身高與體重服從下列迴歸模型：

$$Y_i = \alpha + \beta(x_i - \bar{x}) + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i = 1, \dots, n$$

(a) 試求 α, β 及 σ^2 之 MLE (maximum likelihood estimators)？(5 分)

(b) 若 σ^2 未知，試求 $E(Y|x^0)$ 之 95% 信賴區間。(5 分)

(c) 已知 $x_i \in [a, b], \forall 1 \leq i \leq n$ ，試決定最佳 $\{x_i^*\}_{i=1}^n$ ，方可使得上述信賴區間之長度為最短。(5 分)

七、欲估計某銅板出現正面之機率值 θ ，今隨機擲此銅板 n 次，令 Y 表示出現正面之次數，若採用下列估計式：

$$D = \{\delta \mid \delta(Y) = aY + b\}$$

且損失函數定義如下：

$$L(\theta, \delta) = \frac{(\theta - \delta)^2}{\theta(1 - \theta)}, \quad \theta \in (0, 1)$$

已知 θ 之事前分配 (prior distribution) 服從 Beta (2; 3)，試問 a 及 b 值如何挑選，方可使此估計量為 Bayes decision rule；並請分別計算 Bayes rule 及 \bar{X} 的 Risk functions；並分析其 relative efficiency。(15 分)

國立清華大學命題紙

九十一學年度 統計學研究所 (所) _____ 組碩士班研究生招生考試

科目 統計學 科號 0303 共 3 頁第 2 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

四、某公司採購一批產品，其批量總數為 N (已知)，其中有 M 個不良品 (未知)。今從該產品中以抽出不放回 (WOR) 法隨機抽出 n 個產品，若 X 為樣本不良品之總數，且公司所採用之允收決策法則 (R) 如下：

$$R: \text{退回此批貨} \quad \text{iff} \quad X \geq C;$$

試回答下列決策問題：

- (a) 求 X 之機率分配並試證明此機率分配擁有 MLR (*monotone likelihood ratio*) property? (10 分)
- (b) 若此法則之 C 值滿足 $\Pr(X \geq C) = \alpha$ ，試問決策法則 R 是否為 level α 的 UMP (Uniformly Most powerful) test? 理由為何? (5 分)

五、欲比較 A, B 二種品牌輪胎之耐磨性是否有顯著差異。今隨機從 A, B 產品中分別抽出 5 組輪胎並分別安裝在 5 部摩托車之前後輪進行耐磨性測試，此 5 部車經過 2 萬公里之測試後，輪胎磨損量 (單位: mm) 紀錄如下：

摩托車	A 品牌	B 品牌
1	9.4	9.8
2	9.1	9.7
3	11.8	12.3
4	8.3	8.8
5	10.2	10.6

- (a) 在 $\alpha = 0.05$ 下，若採用獨立樣本 (*independent-sample*) 分析法，試問此二種品牌輪胎之耐磨性是否有顯著差異? (已知 $t_{0.025}(8) = 2.365$) (6 分)