

國立清華大學命題紙

九十二學年度 統計學研究所 (所) 組碩士班研究生招生考試

科目 統計學 科號 0303 共 7 頁第 1 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

* * * 考生請注意：

◎ 共有二十五題，每題均為四選一之選擇題。只須將題號與答案（填入括號內）直式寫入
答案紙如下：

1. ()

2. ()

25. ()

◎ 每題四分，若不會之題目請勿隨意猜測（括號中留空白），回答錯者每題倒扣 1.5 分。

◎ 總分數 = 答對題數 \times 4 - 答錯題數 \times 1.5，若總分數為負數則以零分計算。

1. 若一個 unimodal 連續型隨機變數的分佈是 skewed to the left (negatively skewed), 則下列何者為真？

- (a) Mode < Median < Mean (b) Mean < Median < Mode
(c) Mean < Mode < Median (d) Median < Mean < Mode

2. 自兩個具有相同形狀 (shape) 和分散度 (spread) 之 nonnormal populations 各取出一組 random sample 如下：

Sample 1: 22 23 20 Sample 2: 18 27 26

在給定 significance level = 5% 之條件下，利用 Wilcoxon rank sum test 檢定 location of population 1 在 location of population 2 之左邊的 rejection region 為何？（令 $T =$ rank sum of population 1）

- (a) $T \geq 15$ (b) $T \leq 15$ (c) $T \leq 6$ (d) $T \geq 6$

3. 假設某班級之某次統計期終考成績 X_1, X_2, \dots, X_n ，可以被視為從一平均數為 μ 和變異數為 σ^2 之母體所取出的一組 random sample, 其中 μ 和 σ^2 未知。定義 μ

國立清華大學命題紙

九十二學年度 統計學研究所 (所) 組碩士班研究生招生考試
 科目 統計學 科號 0303 共 7 頁第 2 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

的兩個估計量分別為 $\hat{\mu}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$, $\hat{\mu}_2 = \frac{X_1 + 2X_2 + \dots + nX_n}{1+2+\dots+n}$, 則下列何者為真?

- (a) $\hat{\mu}_1$ 為 unbiased 但 $\hat{\mu}_2$ 不是 (b) $\hat{\mu}_2$ 的變異數小於 $\hat{\mu}_1$ 的變異數 (c) $\hat{\mu}_1$ 的變異數等於 $\hat{\mu}_2$ 的變異數 (d) $\hat{\mu}_1$ 的變異數小於 $\hat{\mu}_2$ 的變異數

4. 某樣本數為 50 之一組 random sample, 經過標準化(各個資料減去樣本平均數後除以樣本標準差)後, 其落在各區間之情形如下:

區間	個數
$(-\infty, -1]$	6
$(-1, 0]$	27
$(0, 1]$	14
$(1, \infty)$	3

現欲用一近似 chi-squared test 來檢定其常態性, 則這一檢定統計量之自由度為多少?

- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

5. 接上題, 若檢定之 significance level = 0.1 且 $P(N(0,1) > 1) = 0.1587$, $P(\chi_1^2 < 2.7055) = P(\chi_3^2 < 6.2514) = 0.9$, 則檢定的結果為

- (a) 無法否定這組資料來自常態分佈 (b) 有充分證據顯示這組資料不是來自常態分佈
 (c) 資訊不足, 無法判斷 (d) 以上皆非

6. 關於一個自由度為 n 的 chi-squared distribution, 下列的敘述何者為非?

- (a) 分佈為 skewed to the left (b) 對於任意的一實數 $\alpha (> 0)$, $P(\chi_n^2 < \alpha)$ 隨著 n 的遞增而遞減 (c) 分佈的 median 隨著 n 的遞增而遞增 (d) 當 n 越大, 則此分佈越近似一個常態分佈。

7. 假設隨機變數 X 為二項分佈 $b(n,p)$, 則 $p(1-p)$ 之一 unbiased estimator 為

- (a) $X(n-X)/n$ (b) $X(X-1)/n$ (c) $X(n-X)/[n(n-1)]$ (d) 以上皆非

國立清華大學命題紙

九十二學年度 統計學研究所 (所) _____ 組碩士班研究生招生考試

科目 統計學 科號 0303 共 7 頁第 3 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

8. 某一 randomized block experiment 之資料收集如下：

	<u>Treatment</u>				
<u>Block</u>	1	2	3	4	5
1	$X_{1,1}$	$X_{1,2}$			$X_{1,5}$
2	$X_{2,1}$	$X_{2,2}$			$X_{2,5}$
.	.	.			.
.	.	.			.
.	.	.			.
12	$X_{12,1}$	$X_{12,2}$			$X_{12,5}$

其中 sum of squares for Total, $SS(\text{Total}) = 3,500$, sum of squares for Treatment, $SST = 1,500$, sum of squares for Block, $SSB = 1,000$. 在給定 significance level = 0.01 且

$P(F_{11,44} < 2.73) = P(F_{4,44} < 3.83) = 0.99$ 之條件下，檢定 H_0 : Treatment means 均相同，則

下列何者為真？

- (a) 沒有足夠的證據棄卻 (reject) H_0 . (b) 有充分的證據棄卻 H_0 . (c) 所給的資訊不足，無法作答 (d) 以上皆非

9. 在第 8 題的檢定裡，下列何者不是需要的條件：

- (a) 所有隨機變數為常態分佈 (b) 所有隨機變數之變異數相等 (c) Block means 必須相同 (d) Treatment by Block interaction 不存在

10. 若 $P(N(0,1) > 1.96) = 0.025$, $P(N(0,1) > 1.64) = 0.05$ 且 $P(N(0,1) > 1.29) = 0.1$. 假設從某一母體抽出一大樣本，求得此母體平均數 μ 之近似 95%信賴區間為 9.8 ± 0.07 , 則 μ 之近似 80%信賴區間為何？

- (a) 9.7 ± 0.046 (b) 9.7 ± 0.055 (c) 9.8 ± 0.055 (d) 9.8 ± 0.046

國立清華大學命題紙

九十二學年度 統計學研究所 (所) 組碩士班研究生招生考試

科目 統計學 科號 0303 共 7 頁第 4 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

11. 若隨機變數 X_1, X_2, \dots, X_n 代表某班某次統計考試之成績，若這 n 個成績為從一常態分佈

$N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 $\sigma^2 = 2$ ，所取出之一組 random sample，則 $\mu^2 + \mu + 1$ 的 uniformly minimum

variance unbiased estimator 為何？

- (a) $\bar{X}^2 + \bar{X} + 1$ (b) $\bar{X}^2 + \bar{X} - 1$ (c) $\bar{X}^2 + \bar{X} + \frac{n+2}{n}$ (d) $\bar{X}^2 + \bar{X} + \frac{n-2}{n}$

12. 接第 11 題，則 $\log(\mu^2 + \mu + 1)$ 之 maximum likelihood estimator 為何？

- (a) $\log(\bar{X}^2 + \bar{X} + 1)$ (b) $\log(\bar{X}^2 + \bar{X} - 1)$ (c) $\log(\bar{X}^2 + \bar{X} + \frac{n+2}{n})$ (d) $\log(\bar{X}^2 + \bar{X} + \frac{n-2}{n})$

13. 令 $Y_1 = \theta + \varepsilon_1$, $Y_2 = 2\theta - \phi + \varepsilon_2$, $Y_3 = \theta + 2\phi + \varepsilon_3$ ，其中 $E\varepsilon_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ ，則參數 θ 和 ϕ 之 least squares estimators 為何？

(a) $\theta = \frac{Y_1}{6} + \frac{Y_2}{3} - \frac{Y_3}{6}$, $\phi = \frac{-Y_2}{5} + \frac{2}{5}Y_3$ (b) $\theta = \frac{-Y_2}{5} + \frac{2}{5}Y_3$, $\phi = \frac{Y_1}{6} + \frac{Y_2}{3} - \frac{Y_3}{6}$

(c) $\theta = \frac{-Y_2}{5} + \frac{2}{5}Y_3$, $\phi = \frac{Y_1}{6} + \frac{Y_2}{3} + \frac{Y_3}{6}$ (d) $\theta = \frac{Y_1}{6} + \frac{Y_2}{3} + \frac{Y_3}{6}$, $\phi = \frac{-Y_2}{5} + \frac{2}{5}Y_3$

14. 令 X_1, X_2, \dots, X_n 代表從一 double exponential distribution，其 pdf 為 $f(x; \theta) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}$, $\theta \in R$ ，

所取出之一組 random sample，假設 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ 代表這 n 個隨機變數之有序統

計量，則下列何者為參數 θ 之一 unbiased estimator？

- (a) $X_{(1)} + X_{(n)}$ (b) $(X_{(1)} + X_{(n)})/2$ (c) $X_{(n)} - X_{(1)}$ (d) $(X_{(n)} - X_{(1)})/2$

15. 若 X_1 和 X_2 兩個獨立的隨機變數具有相同的 pdf, $f(x) = \frac{x}{6}$, $x = 1, 2, 3$, $f(x) = 0$ ，其它

情況。現定義 $Y = X_1 + X_2$ ，則 Y 之 moment generating function 為何？

- (a) $\frac{4}{36}e^{2t} + \frac{1}{36}e^{3t} + \frac{10}{36}e^{4t} + \frac{12}{36}e^{5t} + \frac{9}{36}e^{6t}$ (b) $\frac{10}{36}e^{2t} + \frac{4}{36}e^{3t} + \frac{1}{36}e^{4t} + \frac{12}{36}e^{5t} + \frac{9}{36}e^{6t}$

國立清華大學命題紙

九十二學年度 統計學研究所 (所) 組碩士班研究生招生考試

科目 統計學 科號 0303 共 7 頁第 5 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

© $\frac{1}{36}e^{2t} + \frac{4}{36}e^{3t} + \frac{10}{36}e^{4t} + \frac{12}{36}e^{5t} + \frac{9}{36}e^{6t}$ (d) $\frac{1}{36}e^{2t} + \frac{4}{36}e^{3t} + \frac{10}{36}e^{4t} + \frac{9}{36}e^{5t} + \frac{12}{36}e^{6t}$

16. 若 X_1, X_2, \dots, X_n 代表一組從 $N(\mu, \theta)$, $0 < \theta < \infty$ 且 μ 為已知常數, 所取出之 random sample,

現定義樣本變異數 $S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / n$, 其中 $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n$, 則估計量 $\frac{ns^2}{n-1}$ 之效力

(efficiency) 為多少?

(a) $\frac{n-1}{n}$ (b) $\frac{n}{n+1}$ (c) $\frac{n-1}{n+1}$ (d) 以上皆非

17. 令 X_1, X_2 和 X_3 代表三個獨立的隨機變數, 其分佈分別為 $\chi_{r_1}^2, \chi_{r_2}^2$ 和 $\chi_{r_3}^2$, 則 $\frac{X_1}{X_2}$ 和

$X_1 + X_2$ 這兩個隨機變數是

(a) 正相關 (b) 負相關 (c) 互相獨立 (d) 以上皆非

18. 假設隨機變數 X 具有 pdf $f(x) = 2x, 0 < x < 1, f(x) = 0$, 其它情形, 而 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)} \leq X_{(4)}$

代表來自 X 之一組 random sample 的 order statistics, 則 $P(X_{(3)} > \frac{1}{2}) = ?$

(a) $\frac{240}{256}$ (b) $\frac{241}{256}$ (c) $\frac{242}{256}$ (d) $\frac{243}{256}$

19. 假設 X_1, X_2, \dots, X_n 代表一組從 $N(\theta, \sigma^2)$ 所取出之 random sample, 其中 σ^2 為已知,

若參數 θ 有一來自 $N(\theta_0, \sigma_0^2)$ 的 prior pdf, 則在 square-error loss function 的假設之下,

θ 之 Bayes' estimator 可以寫成 $\hat{\theta} = a \sum_{i=1}^n X_i / n + b\theta_0$. 試問下列何者為真?

國立清華大學命題紙

九十二學年度 統計學研究所 (所) 組碩士班研究生招生考試

科目 統計學 科號 0303 共 7 頁第 6 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

(a) $a = \frac{\sigma^2/n}{\sigma_0^2 + \sigma^2/n}, b = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \sigma^2/n}$

(b) $a = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \sigma^2/n}, b = \frac{\sigma^2/n}{\sigma_0^2 + \sigma^2/n}$

© $a = \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2/n + \sigma^2}, b = \frac{\sigma_0^2/n}{\sigma_0^2/n + \sigma^2}$

(d) $a = \frac{\sigma_0^2/n}{\sigma_0^2/n + \sigma^2}, b = \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2/n + \sigma^2}$

20. 接 19 題，若定義 $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ ，則利用 posterior pdf $h(\theta|\bar{X})$ 所求得之 95% credible set

為何？（提示： $P(N(0,1) > 1.96) = 0.025$ ）

(a) $\frac{\bar{x}\sigma_0^2 + \theta_0\sigma^2/n}{\sigma_0^2 + \sigma^2/n} \pm 1.96 \sqrt{\frac{(\sigma^2/n)\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \sigma^2/n}}$

(b) $\frac{\bar{x}\sigma_0^2/n + \theta_0\sigma^2}{\sigma_0^2/n + \sigma^2} \pm 1.96 \sqrt{\frac{\sigma^2\sigma_0^2/n}{\sigma_0^2/n + \sigma^2}}$

© $\frac{(\sigma^2/n)\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \sigma^2/n} \pm 1.96 \sqrt{\frac{\bar{x}\sigma_0^2 + \theta_0\sigma^2/n}{\sigma_0^2 + \sigma^2/n}}$

(d) $\frac{\sigma^2\sigma_0^2/n}{\sigma_0^2/n + \sigma^2} \pm 1.96 \sqrt{\frac{\bar{x}\sigma_0^2/n + \theta_0\sigma^2}{\sigma_0^2/n + \sigma^2}}$

21. 假設 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 代表從一 pdf 為 $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}, 0 < x < 1, f(x;\theta) = 0$ ，其它情形，之母體所取出之一組 random sample，則參數 θ unbiased estimator 之 Rao-Cramer lower bound 為何？

(a) $\frac{\theta^2}{n+1}$ (b) $\frac{\theta^2}{n-1}$ (c) $\frac{\theta^2}{n-2}$ (d) $\frac{\theta^2}{n}$

22. 令 X_1, X_2, \dots, X_n 代表一組從 Poisson (μ)，其中 $\mu > 0$ 為其母體平均數，所取出之 random

sample，現定義 $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ 為其樣本平均數，則當 n 足夠大時 \bar{X}^3 近似何種分佈？

(a) $N(\mu^3, \frac{\mu^3}{n})$ (b) $N(\mu^3, \frac{\mu^5}{n})$ (c) $N(\mu^3, \frac{9\mu^5}{n})$ (d) $N(\mu^3, \frac{3\mu^3}{n})$

23. 若 X_1, X_2, \dots, X_n 為一組從 $N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 $-\infty < \mu < \infty$ 和 $\sigma^2 > 0$ 均為未知參數，所取出之

國立清華大學命題紙

九十二學年度 統計學研究所 (所) 組碩士班研究生招生考試

科目 統計學 科號 0303 共 7 頁第 7 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

random sample. 檢定 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ (已知) 對 $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$, 若定義 rejection region

$$= \{(x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 < C_1 \text{ 或 } \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 > C_2\}, \text{ 在給定 significance level 爲 } \alpha \text{ 之}$$

條件下, 常數 C_1 和 C_2 滿足

$$\int_{c_1/\sigma_0^2}^{c_2/\sigma_0^2} g(t) dt = \int_{c_1/\sigma_0^2}^{c_2/\sigma_0^2} k(t)g(t) = 1 - \alpha,$$

其中 $g(t)$ 代表 χ_{n-1}^2 之 pdf, 則此檢定爲 uniformly most powerful unbiased test. 試問上式

中 $k(t)$ 爲何?

- (a) $\frac{t}{n-1}$ (b) $\frac{t}{n}$ (c) t (d) $(n-1)t$

24. 假設有一堆壽命分佈 (其 cdf 爲 $F(x)$) 均相同的零件, 現從其中抽出 nK 個接受測試。

定義 $Y_i =$ 第 i 組 K 個零件中壽命大於時間 t_0 的個數, $i = 1, 2, \dots, n$, 則 $\bar{Y} = \sum_{i=1}^n Y_i / n$ 之

standard deviation 爲多少?

- (a) $\sqrt{nK F(t_0)(1-F(t_0))}$ (b) $\sqrt{\frac{nF(t_0)(1-F(t_0))}{K}}$ (c) $\sqrt{\frac{F(t_0)(1-F(t_0))}{nK}}$
 (d) $\sqrt{\frac{KF(t_0)(1-F(t_0))}{n}}$

25. 某一俱樂部只收母體中 IQ 爲最上面 2% 的人爲其會員, 假設母體中所有人的 IQ 爲一平均數

100 且變異數 256 之近似常態分佈, 則任何一個人 IQ 至少爲何才夠資格申請進入這個俱樂部?

(提示: $P(N(0,1) < 2.05) = 0.98$, $P(N(0,1) < 1.75) = 0.96$)

- (a) 128 (b) 130 (c) 133 (d) 135