

八十四學年度 核工與工物所 組碩士班研究生入學考試

科目 工程數學 科號 3301 共 4 頁第 1 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

1. 選擇題 (單選，不倒扣，每題三分，共 45 分)

1. 下列各級數，何者收斂

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n^2}$ 4) 以上皆非

2. 若 $\delta(x)$ 代表 Dirac delta 函數，計算積分 $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \delta(x^4 - 1) dx =$

1) 4 2) 2 3) 1 4) 1/2

3. 設 $\hat{n}(t)$ 為單位向量 (unit vector)，則下列關於 $d\hat{n}/dt$ 的敘述何者正確

1) 必為零向量 2) 必垂直於 \hat{n} 3) 必平行於 \hat{n} 4) 仍為單位向量

4. 設 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 皆為一次偏導數連續的函數，且

$\oint_c (u dx + v dy) = 0$ 這裡 c 是 $x-y$ 平面上任意簡單封閉曲線，則

1) $u_x = v_y$ 2) $u_x = -v_y$ 3) $u_y = v_x$ 4) $u_y = -v_x$

5. 若以 $\langle x, y \rangle = \overline{(\sum_{i=1}^n x_i)} \cdot (\sum_{i=1}^n y_i)$ 為二向量 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 和 $y = (y_1, \dots, y_n)$ 之內乘積定義 (其中 $\overline{x_i}$ 代表 x_i 的共軛複數)，則此定義與下列何條件不符合

1) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, 2) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, z \rangle + \overline{\beta} \langle y, z \rangle$

3) $\langle x, y \rangle \geq 0$ 等號成立若且唯若 $x=0$,

4) $\langle x-y, x+y \rangle \leq \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle$

6. 關於方陣 A 之下列特性何者不具相似變換 (similar transformation) 之不變性

1) 特徵值 (eigenvalues) 2) 特徵向量 (eigenvectors)

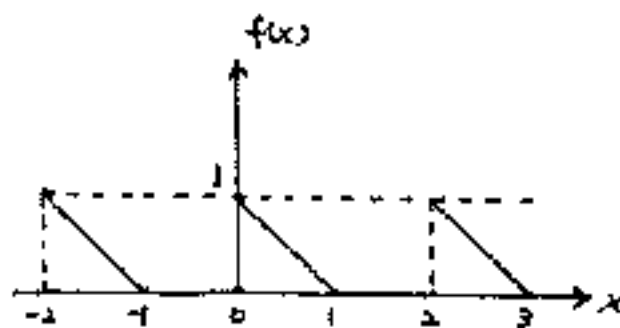
3) 跡 (trace) 4) 行列式 (determinant)

八十四學年度 理工學院 組碩士班研究生入學考試

科目 工程數學 科號 330 / 共 4 頁第 2 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

7. 關於二次常微方程式 $xy'' + xy' - y = 0$, 下列敘述何者正確
- 1) 原點為正則奇點 (regular singularity)
 - 2) 二線性獨立解中至少有一個在原點有奇點 (singularity),
 - 3) 二線性獨立解均可表成級數 $x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 形式
 - 4) 以上皆非
8. 下面函數何者可能是二次常係數線性齊次常微方程式的解
- 1) x^3 2) $x^2 \cos x$ 3) e^x/x 4) 以上皆不可能
9. 關於二次線性常微方程式 $(x \cot x - 1)y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$, 下面敘述何者錯誤
- 1) x 和 $\sin x$ 是它的二個線性獨立解
 - 2) 以上二解的 Wronskian 行列式不為零
 - 3) $x=0$ 為此方程式的正則奇點
 - 4) 此方程式的任何解均在 $x=0$ 點可解析 (analytic)
10. 如右圖之 $f(x)$ 的 Fourier 級數為

- 1) $1/4 + \sum_{n=1}^{\infty} (2 \frac{\cos n\pi x}{n^2 \pi^2} + \frac{\sin n\pi x}{n\pi})$
- 2) $1/4 + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2 \pi^2} + \frac{\sin n\pi x}{n\pi})$
- 3) $1/4 + \sum_{n=1}^{\infty} (2 \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2 \pi^2} + \frac{\sin n\pi x}{n\pi})$
- 4) $1/4 + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\cos 2n\pi x}{2n^2 \pi^2} + \frac{\sin n\pi x}{n\pi})$



八十四學年度 理工學系 組碩士班研究生入學考試

科目 工程數學 科號 3301 共 4 頁第 3 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

11. 關於複變函數 $f(z) = \csc^2 z \cdot \ln(1-z)$, 下列敘述何者錯誤

- 1) 原點是 $f(z)$ 的簡單極點 (pole) 2) $\lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Res} f(z) = 1$
 3) $z=1$ 是 $f(z)$ 的分枝點 (branch point), 4) $z=\pi$ 是 $f(z)$ 的二次極點

12. 下面那一個複變函數無法對原點作 Laurent 級數或 Taylor 級數展開

- 1) $\frac{1}{z(z+1)}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{z(z-1)}}$ 3) $\frac{1}{z\sqrt{z+1}}$ 4) $\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}$

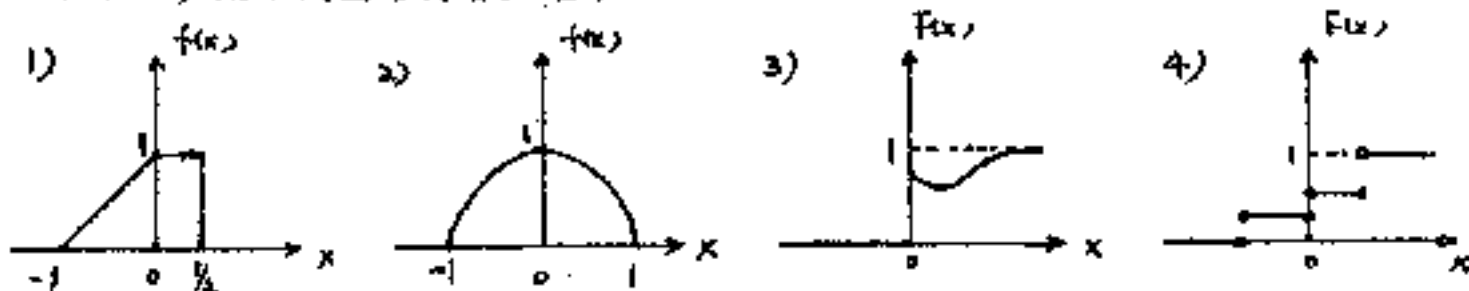
13. 雙曲型二次偏微方程式 $Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = 0$, 其中 A, B, \dots, F 均是 x, y 的函數, 其二組特徵曲線 (characteristic curves) 正交 (orthogonal) 的條件為

- 1) $A+C=0$ 2) $A-C=0$ 3) $B+C=0$ 4) $B-C=0$

14. 關於波動方程式 $\partial^2 u / \partial t^2 - \partial^2 u / \partial x^2 = 0$ 配上條件 $u(0, t) = 0$, $u(x, 0) = u_t(x, 0) = x^2$ 的解, 下列敘述何者正確?

- 1) $u = x^2(1+t)$ 2) 條件不足, 無限多解 3) 無解 4) 以上皆非

15. 若 $f(x)$ 代表密度函數 (density function) 和 $F(x)$ 代表分佈函數 (distribution function) 則下列圖形何者正確?



八十四學年度 精工系工物所 組碩士班研究生入學考試

科目 工程數學 科號 3301 共 4 頁第 4 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

II. 計算與證明題 (共三題, 合計五十五分)

1. 考慮二次常微方程式

$$\frac{d}{dx}(1+x)^2 \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad \lambda \text{ 為參數}$$

配以邊界條件 $y(0)=y(1)=0$, 求此問題的特徵值與特徵函數。 (20%)

2. i) 若 $\bar{f}(s)$ 和 $\bar{g}(s)$ 分別為 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的 Laplace 變換, 證明摺積定理 (convolution theorem)

$$L\left(\int_0^t f(u)g(t-u)du\right) = \bar{f}(s) \cdot \bar{g}(s) \quad (10\%)$$

ii) 利用 i) 之結果或其他方法證明

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} (t-y)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-y)^{\alpha+\beta-1} \quad \alpha, \beta > 0$$

這裡 $\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ 為 Gamma 函數。 (10%)

3. 設 $J_\nu(x)$ 是 Bessel 函數滿足 Bessel 方程式

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

證明: 當 $|x| \gg 1$ 時, $J_\nu(x)$ 漸近於

$$A \cdot \sin(x - \alpha) / \sqrt{x}$$

這裡 A 與 α 為常數。 (15%)