

八十八學年度 經濟學 系(所) _____ 組碩士班研究生招生考試
 微積分與統計 科號 5603 共 3 頁第 1 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

(一) 本部份有十題選擇題。每一題最多有兩個(即一個或兩個)答案是對的。每題各五分，此部份共佔五十分。

1. 請判斷下列函數何者為連續函數。

- A. $f(x) = \ln x, 0 \leq x < \infty, f(x) = 0, x = 0$.
 B. $f(x) = |x-10|^2, -\infty < x < \infty$.
 C. $f(x) = \tan x, -\infty < x < \infty$.
 D. $f(x) = (x^2-1)/(x-1), x \neq 1, f(1) = 2$.
 E. $f(x) = (x^2-16)/|x-4|$.

2. 請找出下列正確的積分值。

- A. $\int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^2} = \frac{2}{9}$ B. $\int_{-1}^0 x\sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{3}$
 C. $\int_{-4}^4 |u| du = 32$ D. $\int_9^{41} \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}} du = 3$
 E. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$

3. 請找出不會收斂的數列。

- A. $(1+\ln n)/n$ B. $\ln n/n^{10}$ C. $n!/10^n$
 D. $(3/n)^{10}$ E. $(n^2+n)^{10}$

4. 請判斷下列陳述的真偽。

- A. 連續函數必定可微分。
 B. 在 R^n 上收斂的數列可能有數個收斂點，但在 R 上收斂的數列的收斂點只會有一個。
 C. f 在 $[a,b]$ 上是連續函數保證 $\int_a^b f(x)dx$ 存在。
 D. 如果 f 是嚴格遞增，則 f' 是嚴格遞減。
 E. 假設函數 f 的一階導數 f' 存在，且 f' 是單調函數，則 f 是連續函數。

八十八學年度 經濟學 系(所) 組碩士班研究生招生考試
微積分與統計 科號 5603 共 3 頁第 2 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

5. 下列哪些條件能確定 $f(x)=0$ 有解?

- A. $f(a)$ 與 $f(b)$ 不同號, $a < b$, 且 f 為連續函數。
 B. f 連續可微分, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 。
 C. f 是凹函數, 且其存在極大值。
 D. f 是準凹函數, 且其存在極大值。
 E. 已知 $F'(x) = f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ 。

6. 考慮下列的求解極值問題:

$$\max_{(x,y)} f(x,y), \quad \text{s.t. } x+y=10$$

哪些條件是 (x^*, y^*) 為極大值的充分條件?

- I. f 是凹函數, II. f 是準凹函數, III. $df/dx = df/dy = 0$, IV. $d^2f/dx^2 < 0$, $d^2f/dy^2 < 0$,
 V. $(df/dx)^2(d^2f/dy^2) + (df/dy)(d^2f/dx^2) - 2(df/dx)(df/dy)(d^2f/dxdy) < 0$ 。

- A. I only. B. I and III. C. II and IV.
 D. III and IV. E. III and V.

7. 下列哪些條件保證 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 為嚴格凹函數?

- A. $f(0.5x+0.5y) > 0.5f(x)+0.5f(y)$ 。
 B. $df/dx > 0$, for all x 。
 C. $d^2f/dx^2 < 0$, for all x 。
 D. $d^2f/dx^2 > 0$, for all x 。
 E. $f(ax + (1-a)y) < af(x) + (1-a)f(y)$, for $0 < a < 1$ 。

8. 下列哪幾點實現 $f(x) = |x-x^2|$ 的局部極大值或極小值?

- A. $x=1/2$. B. $x=1$. C. $x=-1/2$. D. $x=0$. E. $x=-2$.

9. 若 $f(x) = \sin(2x+1)$ 且 $g(x) = x^2+3$, for all real x , 則下列哪個項目是等於合成函數 $(fg(x))$ 的導數?

- A. $\sin(2x^2+7)$. B. $\cos(2x^2+7)$. C. $6\sin(2x^2+7)$.
 D. $6\cos(2x^2+7)$. E. $6x^2\cos(2x^2+7)$.

10. 下列哪些條件保證一有限制式的極大化問題 $\text{Max } f(x), \text{ s.t. } x \in F \subset \mathbb{R}^n$ 有解?

- A. f 連續可微分, F 是凸集合。 B. f 是凸函數, F 是凸集合。
 C. f 可微分, F 是閉集合。 D. f 是遞增函數, F 是閉集合。
 E. f 是遞增凹函數, F 是凹集合。

八十八學年度 經濟學 系(所) _____ 組碩士班研究生招生考試

微積分與統計 科號 5603 共 3 頁第 3 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

(二)

1. (10 points)

Let Y be a random variable whose moment generating function is:

$$m(t) = 1/4 (3e^t + e^{-t})$$

Find $E(Y)$ and $V(Y)$.

2. (8 points) If Y is a random variable such that $E(Y) = 10$, $P(Y \leq 7) = 0.2$, and $P(Y \geq 13) = 0.3$, what is the smallest value that $V(Y)$ can be? (i.e., find the lower bound for $V(Y)$)

3. (12 points) Let Y_1 and Y_2 be jointly distributed according to:

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} ky_1y_2 & \text{for } 0 < y_1 < 1; 0 < y_2 < 1. \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

where k is a constant. (You need not solve for k in this problem!)

Find $f(y_2|y_1)$ and $V(Y_2|Y_1)$.

4. (20 points) Let x_1, x_2, \dots, x_n be a sample of size n from a normal distribution $N(\mu, \sigma^2)$. Consider the following point estimators of μ :

$$\hat{\mu}_1 = \bar{x}, \text{ the sample mean}$$

$$\hat{\mu}_2 = x_1$$

$$\hat{\mu}_3 = \frac{x_1}{2} + \frac{1}{2(n-1)} (x_2 + x_3 + \dots + x_n)$$

(1) Which of these are unbiased?

(2) Which of these are consistent?

(3) Are all unbiased estimators consistent?

(4) Is the assumption of normality needed to answer parts (1) to (3)? For what purposes is this assumption needed?