長途交流電線之計算法[一]

薩本棟

一　題之性質

當交流電 (alternating current) 通行於電線 (transmission line) 時,因電線之抗電力 (resistance),感應抗力 (inductive reactance), 積電力 (capacity),及漏電力 (leakance) 等,在發電處所生之電壓 (voltage) 及電流 (current),常不與在收電處所得之值相等。設已知在電線一端之電壓及電流,而欲求其在他端之值,通常解法,多先假定全線之積電力,及漏電力,聚於線中一點或數點,然後再推演其公式。惟電線之積電力及漏電力,非聚於一點或數點,蓋乃沿全線而平均分布者。故依前項假設所得之公式,僅可為本題之近似解法。欲求解此題之正確公式,須藉微分方程式 (Differential Equations) 及雙曲線函數 (Hyperbolic Functions) 學理而推演之。本篇意旨,即為說明此正確公式之推演法及其應用。

在未討論本題所應用之微分方程式及雙曲線函數之前,今先將交流電之性質及其表記法,略為說明,庶讀者雖僅具淺近電學之智識,亦可了解本篇之理。

二　以正弦曲線表示交流電之式,及交流電之位相角

一,本文所用參考書如下:

Dawes, C. L.: Course in electrical engineering: (electrical engineering texts), vol. 2, alternating currents, New York, McGraw, 1922

Karapetoff, V; The electric circuit: second edition, New York, McGraw, 1912

Steinmetz, C. P.: Electrical engineering library, 9 vols: vol 2 on engineering mathematics, vol. 8 on transient phenomena: New York, McGraw, 1921

Kennelly, A. C.: Tables of complex hyperbolic and circular functions: Cambridge, Harvard University Press, 1921

Kennelly, A. C.: Application of hyperbolic functions to electrical engineering problems: second edition, New York, McGraw, 1917

Phillips, H. B.: Differential calculus: New York, McGraw, 1916

Pernot, F. E.: Electrical phenomena in parallel conductors: New York, Wiley, 1918

通常之交流電流及電壓,其與時間變更之律,多可以一正弦曲綫 (sine curve) 表明之。例如,有一交流電流,每秒交替 f 次,則其交替週間 (period of alternation) 爲 $\frac{1}{f}$ 秒,其最大値爲 I,則表示此電流之曲線,其式如第一圖之正弦線。若令O點爲原點,則此曲線之方程式可書作

$$i = I \sin 2\pi ft \tag{1}$$

在一電道中所經行之電流或電壓常不限於一派。(如在電道之異部分者)此數派電流或電壓,其週期均相同,惟其極大値及經過零點之時間多不同。表是之正弦曲綫,其位置如第二圖。當第一電流經過其極大値而起始漸減之時,第二電流之値,仍繼續增加,且須在某短時後,方達其極大値。是卽,第二電流落於第一電流之後;或,第一電流爲第二電流之前導。此兩電流波式之兩零點,其相距之 α 角,名爲位相角(phase angle),蓋卽所以表示兩電流之先後位置者也。今若以 $i = I \sin 2\pi ft$ 表第一電流之方程式,則第二電流之方程式必爲　$i' = I' \sin (2\pi ft - \alpha)$。 (2)

由是知凡一電流之位相,在又一電流之後 α 角時,位相落後之電流,其方程較位相在前之電流須多含壹 $-\alpha$ 項如(2)式者。反之,位相前導之電流,其方程較位相在後之電流,須多含壹 $+\alpha$ 項。例如三電流之方程各爲

$$i_1 = I_1 \sin (2\pi ft - \alpha)$$

$$i_2 = I_2 \sin (2\pi ft)$$

$$i_3 = I_3 \sin (2\pi ft + \alpha)$$

則 i_1 之位相,在 i_2 之後 α 角,而 i_2 之位相,復在 i_3 之後 α 角;

亦即 i_2 之位相在 i_3 之前 α 角,而 i_2 之位相,復在 i_1 之前 α 角也。

既知表示位相差異之式,今可進而求在各種電道中,電流與電壓之關係。

三　在無感應性之電道中(non-inductive circuit)交流電流及電壓之關係

設 $i = I \sin 2\pi ft$ 爲流行於一無感應性電道之電流。若此電道之抗電力爲R,則在 t 時所需之電壓,必爲 $e = Ri = RI \sin(2\pi ft)$ (3)

由此式觀之,則知在無感應性之電道中,電流之位相,與發此電流之電壓之位相同(參觀第三圖甲)。又電壓之極大值爲電道之抗力R,與電流之極大值之積。惟在同式曲線中,有效值(effective value)與極大值爲正比例,故有效電壓與有效電流之關係可表爲　$\dot{E} = R\dot{I}$。(3¹)

[$\dot{E}$ 與 $\dot{I}$ 之下,均附以小點,即表二者爲有向量(vector)之意。]

若以有向量表交流電流及電壓,則在無感應性之電道中,電壓之方向必與電流之方向體合,如第三圖乙。

四　在含純粹感應性之電道中(pure inductive circuit)交流電壓及電流之關係

當電流通過一感應電道時,因感應作用,遂發生一感應電壓;此電壓之值與電流因時間之變化率成正比例,其方向乃適爲阻滯原電流變更之進行。如是,若令 e' 爲 i 電流在 t 時所感應之電壓,二者之關係,可以微分式表之如次:

$$e' = -L\frac{di}{dt} \qquad (4^1)$$

此式中之L，為一恒數，其名為感應係數，其值乃依感應體之組合及性質而定。表L之單位，與安培，(ampere)弗打(volt)及瓦德(watt)並稱者為亨利(henry)。又，式之右端之負號，即表示電壓之方向，阻滯電流變更之進行之意。

今若以e為所應施以抵消因i電流而感應之電壓e'，則e之值必與e'相等，而其方向必與e'相反，即$e=-e'$，故

$$e = L\frac{di}{dt} \qquad (4)$$

感應作用，僅於電流變更之時呈現。故在直流電道中，此種作用，惟當開閉電門之時見之。在交流電道中，電流既變更不息，故感應作用亦無時不有。

因感應作用所應施之電壓，其在t時之值為$e=L\frac{di}{dt}$既如上述，則知在純粹感應電道（即不含抗電力）中，欲使$i=I\sin 2\pi ft$電流通行，所需之電壓必為

$$e = L\frac{di}{dt} = L\frac{d(I\sin 2\pi ft)}{dt} = L(2\pi fI)\cos 2\pi ft$$
$$= 2\pi fL\ I\sin(2\pi ft+90^\circ) \qquad (5)$$

由(5)方程式觀之，則知在純粹感應電道中，電壓之位相在電流之前九〇度，（即電流之位相在電壓之後九〇度）；而其極大值為$2\pi fLI$。於是表有效電壓及有效電流之數值關係，其式為$E=2\pi fLI=X_L I$， (5')

以(5')式與(3')式相較，則知$2\pi fL$項之於純粹感應電道，其性質與R項之於無感應性電道之性質相同。故$2\pi fL$項亦可以一種抗力視之。$2\pi fL$之簡單符號，常為X_L，而其名則為感應抗力(inductive reactance)，其單位亦稱為歐姆(ohm)。

在純粹感應電道中，電壓及電流曲線之圖式如第四圖中，

其有向量之圖式則如第四圖乙。

五　在含感應抗力及抗電力(series circuit)之聯列電道中電流與電壓之關係

令R爲此聯列電道之抗力,X_L爲其感應抗力, $i = I\sin 2\pi ft$ 爲在t時所流行之交流電流,則因R所需之電壓爲 $e' = RI\sin 2\pi ft$,因X_L在同時所需之電壓爲 $e'' = X_L I\cos 2\pi ft$,故在t時此電道所共需之電壓必爲

$$e = RI\sin 2\pi ft + X_L I\cos 2\pi ft. \qquad (6)$$

若以 $R = Z\cos\alpha$, $X_L = Z\sin\alpha$

卽 $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$, $\tan\alpha = \frac{X_L}{R}$,

前式可化爲

$$e = ZI\,[\sin(2\pi ft).\cos\alpha + \cos(2\pi ft).\sin\alpha]$$

$$= ZI\sin[2\pi ft + \alpha]。 \qquad (7)$$

由(7)式觀之,則知在含感應抗力與抗電力之電道中,電壓之位相在電流之前 $\alpha = \tan^{-1}\frac{X_L}{R}$ 角,而其最大値爲 $ZI = \sqrt{R^2 + X_L} I$;故在此種電道中,有效電壓與有效電流之數値關係,可書爲 $E = ZI = \sqrt{R^2 + X_L^2}\, I$ (7^1)

以(7^1)式與(5^1)及(3^1)兩式相較,則知Z之性質亦可以一種之抗力視之,今名之曰阻力(impedance)。其單位亦名爲歐姆。

第五圖甲卽爲此節電壓及電流曲線之圖式;第五圖乙,則以有向量表解此節之圖式。

六　在有積電力(capacity)之電道中,電壓及電流之關係

尋常電線,非僅有抗電力及感應抗力者也。蓋數電線幷行,中隔以絕電質,其組合法與一積電器(condenser)無異。因

此,沿全電線,均有積電能力。若欲考究在交流電道中積電器之作用,則請先述其在直流電道之作用。

設施一直流電壓於一完全之積電器(卽不漏電者)之兩端,則電流漸次流入此器而提高其電位。迨在器兩端之電位差(potential difference),與電壓之値相等,而電壓之値不復更變時,電流乃終止流聚。由是所積於器內之電量,其値與所施之電壓之値爲正比例;卽如 e 爲電壓,q 爲電量,c 爲積電器之容量,則 $q = ce$, c 之單位名爲法拉(farad)。

今若將已積有電量之積電器,接其兩端,則器兩端之電位差,倏然消滅,而器內所貯之電量,將悉行流出。故積電器之作用,僅能於電壓變更之時見之。在直流電道中,電壓不常變,故積電器之作用亦不常見。若在交流電道中,電壓之變更無已時,聚電器之作用遂亦無已時。

設令 $i = I \sin 2\pi ft$ 爲流行於一含完全積電性之電道之電流(卽電道僅含一不漏電之積電器,而無其他阻力);在微分時間 dt 內,所積蓄于器內之電量必爲 $idt = dq$。惟欲積此電量所需之微分電壓 de,按前述之理,必爲 $de = \frac{dq}{c}$ 如是則 $de = \frac{idt}{c}$,而 $e = \int \frac{idt}{c}$

以 $I \sin 2\pi ft$ 代 i,而求前式之積分,則得

$$e = \frac{I}{c(2\pi f)} \left[-\cos 2\pi ft\right] = \frac{I}{2\pi fc} \sin(2\pi ft - 90^\circ) \qquad (8)$$

由此式觀之,則知在僅含積電性之電道內,電壓之位相在電流之後九〇度,(表此二者之曲線之圖式如第六圖甲;以有向量表解之圖,則如第六圖乙),其最大値爲 $\frac{I}{2\pi fc}$ 若以 $X_c = \frac{1}{2\pi fc}$,則電壓與電流之數値關係爲 $E = X_c I$ 或以 $b =$

$2\pi fc$ 則上式亦可書作　$I = Eb$　　(8')

由是知 X_c 之性質亦與一種抗力相同,其名爲積電抗力(condensive reactance)。X_c 之倒數 b,其性質與傳導力(conductance)仝,其名爲積電受力 (condensive susceptance),b 之單位,卽將歐姆倒讀,謂爲姆歐 (mho)。

欲得完全積電器,須有一毫不漏電之絕電質,然無論絕電質之抗力,如何强大,均可有微小電流,從之而洩漏,故通常之積電器,均有漏電力。

今若令一積電器之抗漏力爲R或其漏電力爲g,($g=\frac{1}{R}$)則當施電壓 e 於器之兩端時,所漏洩之電流必爲 $i' = \frac{e}{R} = eg$ 因 e 而流行於積電器之電流,按 (8') 式,爲 $i'' = eb$,惟 i'' 之方向,依前所證之理,須在 e 之前九〇度,i' 之方向,須與 e 同,故如以 $e = E \sin(2\pi ft)$ 爲電壓之方程,則漏洩電流之方程,爲 $i' = gE\sin(2\pi ft)$;而流行於積電器之電流,其方程爲 $i'' = bE \sin(2\pi ft + 90)$。是以流通於此電道之電流,其方程爲

$$i = gE\sin(2\pi ft) + bE\sin(2\pi ft + 90),$$
$$= gE\sin(2\pi ft) + bE\cos(2\pi ft),$$

如以 $Y = \sqrt{b^2 + g^2}$; $\alpha' = \tan^{-1}\frac{b}{g}$,則

$$g = Y\cos\alpha'; \quad b = Y\sin\alpha';$$

而前式可化爲

$$i = YE[\sin(2\pi ft).\cos\alpha' + \cos(2\pi ft).\sin\alpha']$$
$$= YE\sin(2\pi ft + \alpha') \qquad (9)$$

由此式觀之,則知 i 之位相,在 e 之前 $\alpha' = \tan^{-1}\frac{b}{g}$ 角,其極大値爲 YE。於是電流與電壓之數値關係爲

$$I = YE \qquad (9')$$

Y之性質故與受力 b 及導力 g 相同,其名爲綱力 (admittance) 其單位亦爲姆歐;此結果亦可以有向量作圖解之。

七　複幻數之應用 (Applications of Complex Numbers)

以有向量表示電流及電壓之法,前數節已有圖式。今將其尋常電學中所資以表示此等量之解析方式說明之。

若知一有向量之原點,其長度 r 及其與一標線所作之角 θ,或其在兩正交標線之投影如 a 及 b 者,則此量可以確定無誤;例如第七圖中之 O E 有向量者。表記此量之式可書作 $r(\cos\theta + j\sin\theta)$ 或 $a + jb$,因 $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$ 故也。此二式中之含 j 符號項,其意義可暫定爲在縱標線之投影,其不含 j 符號之項,則爲在橫標線之投影。

仿此,則知有向量表作爲 a 者,其在縱線之投影爲零,而在橫線之投影爲 a,故其方向與橫線相同。今若將此 a 有向量,依正方向(即與時針移動相反之方向)旋轉九〇度,則其在縱線之投影爲 a,在橫線之投影爲 o,而其表記之式必爲 ja。由是可知,將一有向量乘以 j,其效果即與將此量向正方旋轉九〇度無異。依此理,如將 ja 有向量再向正方旋轉九〇度,所得之有向量必爲 jja 即 j^2a。然將 ja 旋轉九〇度,即與將 a 旋轉一八〇度同,而 a 旋轉一八〇度後之符號乃 $-a$。$-a$ 與 j^2a 既爲同量之符號,故必恆等,即 $-a \equiv j^2a$,而 $j \equiv \sqrt{-1}$ 明矣。

由是觀之,j 字在數學上之意義,乃尋常代數學中常用之幻數 (imaginary number) 之符號。且前此所用以圖表 j 之法,

亦與代數學中所通用以圖表幻數及複幻數之法相同。是以凡複幻數之加減乘除各公式,此處均可適用。

設有兩有向量 $a+jb$ 及 $c+jd$, 其和或差爲

$$(a+jb)\pm(c+jd)=a\pm c+j(b\pm d),$$

其積則爲 $(a+jb)(c+jd)=ac-bd+j(ad+bc)$,

而其商則爲 $(a+jb)\div(c+jd)=[(a+jb)(c-jd)]\div[(c+jd)(c-jd)]$

$$=[ac+bd+j(bc-ad)]\div[c^2+d^2]。$$

前所列之乘除公式,應用之時,頗不便利,今若將 $a+jb$ 及 $c+jd$ 各化爲極標式,即令 $r_1=\sqrt{a^2+b^2}$, $\theta_1=\tan^{-1}\frac{b}{a}$; $r_2=\sqrt{c^2+d^2}$, $\theta_2=\tan^{-1}\frac{d}{c}$, 則乘除之時可依簡捷之 de Moivre 定理而推演之即 $(a+jb)\times(c+jb)=r_1(\cos\theta_1+j\sin\theta_1)\times r_2(\cos\theta_2+j\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+j\sin(\theta_1+\theta_2)]$。

$(a+jb)\div(c+jd)=r_1(\cos\theta_1+j\sin\theta_1)\div r_2(\cos\theta_2+j\sin\theta_2)=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+j\sin(\theta_1-\theta_2)]$

以複幻數表有向量之式,前段已詳述之矣。自後列數例觀之,則知電道之阻力及納力,雖非有向量,其表法,如亦襲用複幻數,則計算之法較爲簡易。

例如流行於一電道之電流爲 $\underset{\cdot}{i}=a+jb$, 電道之抗力爲 R, 其感應抗力爲 X_L, 則因 R 所需電壓爲 $\underset{\cdot}{e}'=R(a+jb)$; 因 X_L 所需之電壓爲 $\underset{\cdot}{e}''=X_L(a+jb)$。惟 $\underset{\cdot}{e}''$ 之方向在 $\underset{\cdot}{e}'$ 之前九〇度,故表此電道所共需之電壓之式必爲 $\underset{\cdot}{e}=\underset{\cdot}{e}'+j\underset{\cdot}{e}''$ 即

$$\underset{\cdot}{e}=R(a+jb)+jX_L(a+jb)$$

$$=(R+jx_L)(a+jb),\quad=(R+jx_L)\underset{\cdot}{i}$$

以此式與通常之$e=Zi$式相較，則知Z之值，可以$R+jx_L$複幻數表之。

又例如有一電壓，其值為$e=c+jd$，今施之於積電器之兩端；此器之積電容量為c，即其積電受力為$b=2\pi fc$，其漏電力為g。因受力b而流行於此電道之電流為$i''=b(c+jd)$。因漏電力g而洩漏之電流為$i'=g(c+jd)$。然流行於積電器之電流，其方向在洩漏電流之前九〇度，故流行於電道之總電流必為$i=i'+ji''=g(c+jd)+jb(c+jd)$

$$=(g+jb)(c+jd)=(g+jb)e$$

以此式與$i=ye$相較，則知Y之值可以複幻數$g+jb$式表之。

計算長途電線所應備之電學智識，前數節已述之；今可進而言雙曲線函數之性質及其應用。

八　雙曲線函數(Hyperbolic Functions)

按Maclaurin氏定理，任何函數$f(x)$均可展之，使為一無限級數(infinite series)，如下式：

$$f(x)=f(o)+xf'(o)+\frac{x^2}{\underline{|2}}f''(o)+\frac{x^3}{\underline{|3}}f'''(o)+\cdots\cdots$$

式中之f'，f''，f'''等為原函數之首次，二次，三次等微係數。

應用此理，以展ε^x，ε^{-x}，及通常三角學中之$\sin x$及$\cos x$，則得下列數式：

$$\varepsilon^x=1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots+\cdots \qquad (1)$$

$$\varepsilon^{-x}=1-x+\frac{x^2}{\underline{|2}}-\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots-\cdots \qquad (2)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^5}{\underline{|5}}-\frac{x^7}{\underline{|7}}+\cdots-\cdots \qquad (3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{|\underline{2}} + \frac{x^4}{|\underline{4}} - \frac{x^6}{|\underline{6}} + \cdots - \cdots \tag{4}$$

$$j = \sqrt{-1},$$

$$\varepsilon^{jx} = 1 + jx + \frac{j^2x^2}{|\underline{2}} + \frac{j^3x^3}{|\underline{3}} + \cdots + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{|\underline{2}} + \frac{x^4}{|\underline{4}} - \cdots\right) + j\left(x - \frac{x^3}{|\underline{3}} + \frac{x^5}{|\underline{5}} - \cdots\right) \tag{5}$$

又 $\varepsilon^{-jx} = 1 - jx + \frac{(-jx)^2}{|\underline{2}} + \frac{(-jx)^3}{|\underline{3}} + \cdots$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{|\underline{2}} + \frac{x^4}{|\underline{4}} - \cdots\right) - j\left(x - \frac{x^3}{|\underline{3}} + \frac{x^5}{|\underline{5}} - \cdots\right) \tag{6}$$

惟(5)與(6)兩式前括弧內之值,均與(4)式同,而其後括弧內之值,則與(3)式同,故

$$\varepsilon^{jx} = \cos x + j \sin x \tag{7}$$

$$\varepsilon^{-jx} = \cos x - j \sin x \tag{8}$$

將(7)及(8)相加,消去sinx則 $\cos x = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{jx} + \varepsilon^{-jx}\right)$ (9)

將(7)減(8),消去 cosx 則 $\sin x = \frac{1}{2j}\left(\varepsilon^{jx} - \varepsilon^{-jx}\right)$ (10)

(9)及(10)兩方程,乃解析三角學中餘弦與正弦之定義。今若以 jx 代入(3)及(4)兩式中,則得

$$\sin jx = jx - \frac{j^3x^3}{|\underline{3}} + \frac{j^5x^5}{|\underline{5}} - \cdots = j\left(x + \frac{x^3}{|\underline{3}} + \frac{x^5}{|\underline{5}} + \cdots\right) \tag{11}$$

$$\cos jx = 1 - \frac{j^2x^2}{|\underline{2}} + \frac{j^4x^4}{|\underline{4}} - \cdots = 1 + \frac{x^2}{|\underline{2}} + \frac{x^4}{|\underline{4}} + \frac{x^6}{|\underline{6}} + \cdots \tag{12}$$

如復將(11)式乘以 j,後再與(12)式相加則所得者與(2)式之 ε^{-x} 同;如將(11)式乘以 -j,後再加入(12)式,則所得者與(1)式之 ε^{x} 相同。故

$$\varepsilon^{x} = \cos jx - j \sin jx,$$

$$\varepsilon^{-x} = \cos jx + j \sin jx.$$

消去 $\sin jx$，則得 $\cos jx = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{x} + \varepsilon^{-x}\right)$ (13)

消去 $\cos jx$，則得 $\sin jx = \frac{1}{2}\,j\left(\varepsilon^{x} - \varepsilon^{-x}\right)$ (14)

若依圓周正弦 $\sin x$ 及餘弦 $\cos x$ 之定義，而命雙曲線正弦 $\sinh x$ 及餘弦 $\sinh x$ 之定義各爲：

$$\sinh x = \frac{\varepsilon^{x} - \varepsilon^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} + \frac{x^7}{\lfloor 7} + \cdots$$

$$\cosh x = \frac{\varepsilon^{x} + \varepsilon^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^4}{\lfloor 4} + \cdots$$

則得雙曲線函數與圓周函數之關係如下：

$$j \sinh x = \sin jx\ ;\ \cosh x = \cos jx$$

且 $\cos^2 jx + \sin^2 jx = 1$，故 $\cosh^2 x + j^2 \sinh^2 x = 1$，

即 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. 由此類推，可知凡一圓周函數之公式，在雙曲線函數中亦有一相當之公式。例如

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

其相當雙曲線函數之公式爲

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \qquad (15)$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \qquad (16)$$

證 (16) 式之法如下：

$$\cosh(x + y) = \frac{\varepsilon^{x+y} + \varepsilon^{-x-y}}{2} = \frac{\varepsilon^{x}\varepsilon^{y} + \varepsilon^{-x}\varepsilon^{-y}}{2}$$

$$= \frac{2\left(\varepsilon^{x}\varepsilon^{y} + \varepsilon^{-x}\varepsilon^{-y}\right)}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\varepsilon^{x}\varepsilon^{y} + 2\varepsilon^{-x}\varepsilon^{-y} + [\varepsilon^{-x}\varepsilon^{y} - \varepsilon^{-x}\varepsilon^{y}] + [\varepsilon^{x}\varepsilon^{-y} - \varepsilon^{x}\varepsilon^{-y}]\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\varepsilon^{x}\varepsilon^{y} + \varepsilon^{-x}\varepsilon^{y} + \varepsilon^{x}\varepsilon^{-y} + \varepsilon^{-x}\varepsilon^{-y}\right) + \frac{1}{4}\left(\varepsilon^{x}\varepsilon^{y} - \varepsilon^{-x}\varepsilon^{y} - \varepsilon^{x}\varepsilon^{-y} + \varepsilon^{-x}\varepsilon^{-y}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(\varepsilon^{x}+\varepsilon^{-x})(\varepsilon^{y}+\varepsilon^{-y})+\frac{1}{4}(\varepsilon^{x}-\varepsilon^{-x})(\varepsilon^{y}-\varepsilon^{-y})$$

$$=\cosh x \cosh y+\sinh x \sinh y。$$

證 (15) 式法,仿此。

上列數式尚非本題所能應用者,蓋電線之阻力及納力,既常以複幻數表示之,今必須知求複幻數之雙曲線函數值如 $\cosh(\alpha+j\beta)$ 及 $\sinh(\alpha\times j\beta)$ 式者。

求此二式之値,其法有二: 一爲按雙登記之雙曲線函數表(Double entry tables)而索求之。此項表之已刊行者,有哈佛大學Kennelly教授所著一冊[二]。又一法,則爲將前式展化,使爲僅含眞數之函數,然後由尋常之表,索取各值而計算之。展此二式,可依 (15) 及 (16) 兩式而得其公式如次:

$$\cosh(\alpha+j\beta)=\cosh\alpha\cosh j\beta+\sinh\alpha\sinh j\beta,$$

$$\sinh(\alpha+j\beta)=\sinh\alpha\cosh j\beta+\cosh\alpha\sinh j\beta.$$

惟 $\cosh x=\cos jx$; $j\sinh x=\sin jx$.　　　　(見前)

故 $\cosh j\beta=\cos j^{2}\beta=\cos(-\beta)=\cos\beta$;

$\sinh j\beta=1/j\sin j^{2}\beta$; $=-j\sin(-\beta)=j\sin\beta$.

以是代入,則得

$$\cosh(\alpha+j\beta)=\cosh\alpha\cos\beta+j\sinh\alpha\sin\beta \qquad (17)$$

$$\sinh(\alpha+j\beta)=\sinh\alpha\cos\beta+j\cosh\alpha\sin\beta \qquad (18)$$

知此二式,則計算之時,僅需眞數之八線表及眞數之雙曲線函數表。

九 微分方程 (Differential equations)

凡含微係數或微分之方程式均謂爲微分方程式。

二,Kennelly氏所計算之複幻數之函數表,所用之單位角,非弧度(radian)亦非角度(degree),乃九〇度角(即 $\frac{\pi}{2}$ 弧),通常因微積學理所推演之公式,均以弧度爲角之單位,故用其表之時,必將各角之弧度乘以 $\frac{2}{\pi}$。又Kennelly之表,其間隔爲0.005±0.005j,故欲求複幻數之值如 $\cosh(1.358+j3.562)$ 式者,須反覆內推,其法與下段所述之展開公式,繁簡不相上下。

一微分方程式之解式(solution),乃一方程式,表變量之關係而不含其微係數或微分者;且自此方程式所求得之微係數或微分,可以滿足原微分方程式所表之關係。

通常之微分方程式,其解式分爲普通解式(general solution)及特別解式(particular solution)二種。[三]

一微分方程式之普通解式,所含之任意恆數之數目,必與該方程式之最高次之微係數或微分相等。

如將普通解式中之恆數,任加以特別之數,則所得之解式謂爲特別解式。

自上列數定義,可以推證下列定理:

如某微分方程之式爲

$$\frac{d^n y}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots\cdots+P_n y=0,$$

$P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$ 等均爲恆數,今若知其 n 個特別解式爲 $y_1=f_1(x)$, $y_2=f_2(x)$, $\cdots\cdots y_n=f_n(x)$,且知此數特別解式均爲互相獨立者,則解此方程式之普通解式爲

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots\cdots+C_ny_n$$

$C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n$ 等爲 n 個任意恆數,

緣 $y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots\cdots+C_ny_n$ 之 n 次微係數爲:

$$\frac{dy}{dx}=C_1\frac{dy_1}{dx}+C_2\frac{dy_2}{dx}+\cdots+C_n\frac{dy_n}{dx};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=C_1\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+C_2\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}+\cdots+C_n\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}};$$

$$\frac{d^n y}{dx_n}=C_1\frac{d^n y_1}{dx_n}+C_2\frac{d^n y_2}{dx^n}+\cdots+C_n\frac{d^n y_n}{dx^n}.$$

三,此外尚有一種解式,其名爲奇特解式(Singular Solution)。此式不含任意恆數,亦不能由普通解式或特別解式,脫化而成。此解式在通常問題中不常用,今略。

$$\frac{d^n y}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+P_n y$$

$$=C_1\frac{d^n y_1}{dx^n}+C_2\frac{d^n y_2}{dx^n}+\cdots+C_n\frac{d^n y_n}{dx^n}+$$

$$P_1\left(C_1\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+C_2\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}+\cdots+C_n\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\right)+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+$$

$$P_n\left(C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n\right)$$

$$=C_1\left[\frac{d^n y_1}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+\cdots+P_n y_1\right]+$$

$$C_2\left[\frac{d^n y_2}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}+\cdots+P_n y_2\right]+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+$$

$$C_n\left[\frac{d^n y_n}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}+\cdots P_n y_n\right]$$

但 $y_1, y_2,\cdots,y_n$ 等,均為原方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{Px^{n-1}}+\cdots+P_n y=0$$ 之特別解式

故知 $y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$ 即為所求之普通解式,

微分方程式之種類繁多,其解法亦各異。上述之式,乃一極普通者,若令 n 為 2, P_1 為零,則上式即化為本題所應用之二次微分方程: $\frac{d^2y}{dx^2}+P_2y_1=0$. 或 $\frac{d^2y}{dx^2}=Py$, $(P=-P_2.)$

此式中之 P, 可為正數,負數,或複幻數。求其特別解式時,可令 $y=\varepsilon^{mx}$, 則 $\frac{dy}{dx}=m\varepsilon^{mx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=m^2\varepsilon^{mx}$

以是代入,則 $m^2\varepsilon^{mx}=P\varepsilon^{mx}$, 即 $m=\pm\sqrt{P}$.

因得 $y_1=\varepsilon^{\sqrt{P}\,x}$; $y_2=\varepsilon^{\sqrt{P}\,x}$ 為兩特別解式。

$$而\ y = A_1\varepsilon^{\sqrt{p}x} + A_2\varepsilon^{\sqrt{p}x}$$

遂為其普通解式。應用此普通解式於一特別問題時,可由問題之已知條件,而定 A_1 及 A_2 兩恒數之值。由是所得,實為該問題之一個特別解式。

既知解二次微分方程式之法,今可將本篇之正確解法推演之。

十　計算長途電線之正確公式

問題:設自一發電廠,傳遞電流於距廠 l 里之收電站。在收電站所需之電壓為 $E_0 = a+ib$,其電流為 $I_0 = c+id$,試求在發電廠所生之電壓 E_l 及電流 I_l 電流及電壓之交流週期,均為 $\frac{1}{f}$ 秒。

令 L 為全線之感應係數;於是全線之感應抗力為 $x_L = 2\pi fL$。令全線之抗力為 R. 是以全線之阻力為 $Z = R + ix_L$。

令全線之積電能力為 c,則其積電受力為 $b = 2\pi fc$. 如全線之溜電力為 g,則全線之納力為 $Y = g + 2\pi fc$.

又令 E 及 I 為距收電站 S 里之點之電壓及電流。令 $E+dE$ 及 $I+dI$ 為距收電站 $S+ds$ 里之點之電壓及電流。全線長 l 里,而其阻力既為 Z,則在 ds 距離之內,其阻力必為 $\frac{Z}{l}ds = zds$。因此阻力及傳遞之 I 電流,故在 s 點之電壓較在 $s+ds$ 點之電壓小,其差即為　$dE = Iz\,ds.$　(1)

全線之積電納力既為 Y,則在 ds 距離內,其納力為 $\frac{Y}{l}ds = yds$。因此納力及電壓 E,遂有電流 dI 流積於此處。故 $dI = Eyds.$　(2)

求(1)及(2)兩式之微分,則得

$$\frac{d^2E}{ds^2}=z\frac{dI}{ds} \tag{3}$$

及

$$\frac{d^2I}{ds^2}=y\frac{dE}{ds} \tag{4}$$

以(2)及(1)之值代入(3)及(4),則

$$\frac{d^2E}{ds^2}=zy\,E \tag{5}$$

$$\frac{d^2I}{ds^2}=zyI \tag{6}$$

(5)與(6)兩式與前節所述之微分方程同,其解法故各為

$$E=A_1\varepsilon^{\sqrt{yz}s}+A_2\varepsilon^{-\sqrt{yz}s} \tag{7}$$

$$I=B_1\varepsilon^{\sqrt{yz}s}+B_2\varepsilon^{-\sqrt{zy}s} \tag{8}$$

求 A_1 A_2 B_1 及 B_2 四恒數之值時,以在收電站所需之電壓及電流($\dot{E}_0=a+jb$; $\dot{I}_0=c+jd$)代入,即當 $s=o$ 時, $E=\dot{E}_0$, $I=\dot{I}_0$ 是以

$$\dot{E}_0=A_1+A_2, \tag{7'}$$

$$\dot{I}_0=B_1+B_2. \tag{8'}$$

又,將(7)式微分之,則 $\frac{dE}{ds}=A_1\sqrt{zy}\,\varepsilon^{\sqrt{zy}s}-A_2\sqrt{zy}\varepsilon^{-\sqrt{zy}s}$

然以(8)式之 I 值代入(1)式則

$$\frac{dE}{ds}=Iz=z(B_1\varepsilon^{\sqrt{zy}s}+B_2\varepsilon^{-\sqrt{zy}s})$$

故知 $zB_1\varepsilon^{\sqrt{zy}s}+zB_2\varepsilon^{-\sqrt{zy}s}\equiv A_1\sqrt{zy}\,\varepsilon^{\sqrt{zy}s}-A_2\sqrt{zy}\,\varepsilon^{-\sqrt{zy}s}$

即 $$zB_1=A_1\sqrt{zy}\;;\;B_1=A_1\sqrt{\frac{y}{z}} \tag{9}$$

$$zB_2=-A_2\sqrt{zy}\;;\;B_2=-A_2\sqrt{\frac{z}{y}} \tag{10}$$

以(9)及(10)代入(8'),則得

$$I_0 = A_1\sqrt{\frac{y}{z}} - A_2\sqrt{\frac{y}{z}}$$

將此式與(7')式(即 $E_0 = A_1 + A_2$)聯解之,則得 A_1 及 A_2 之值如下:

$$A_1 = \left[E_0\sqrt{\frac{y}{z}} + I_0\right] \div 2\sqrt{\frac{y}{z}} = \frac{1}{2}\left(E_0 + I_0\sqrt{\frac{y}{z}}\right)$$

$$A_2 = \left[E_0\sqrt{\frac{y}{z}} - I_0\right] \div 2\sqrt{\frac{y}{z}} = \frac{1}{2}\left(E_0 - I_0\sqrt{\frac{y}{z}}\right)$$

是以在發電站之 E_1 及 I_1 其公式為

$$E_1 = \frac{1}{2}\left(E_0 + I_0\sqrt{\frac{z}{y}}\right)\varepsilon^{\sqrt{zy}\,\ell} + \frac{1}{2}\left(E_0 - I_0\sqrt{\frac{z}{y}}\right)\varepsilon^{-\sqrt{zy}\,\ell} \qquad (11)$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(E_0\sqrt{\frac{y}{z}} + I_0\right)\varepsilon^{\sqrt{zy}\,\ell} - \frac{1}{2}\left(E_0\sqrt{\frac{y}{z}} - I_0\right)\varepsilon^{-\sqrt{zy}\,\ell} \qquad (12)$$

以 $Z = z\ell$; $Y = y\ell$ 代入,而重列(11)及(12)兩式各項,則

$$E_1 = E_0\left[\frac{\varepsilon^{\sqrt{ZY}} + \varepsilon^{-\sqrt{ZY}}}{2}\right] + I_0\sqrt{\frac{Z}{Y}}\left[\frac{\varepsilon^{\sqrt{ZY}} - \varepsilon^{-\sqrt{ZY}}}{2}\right] \qquad (11')$$

$$I_1 = E_0\sqrt{\frac{Y}{Z}}\left[\frac{\varepsilon^{\sqrt{ZY}} - \varepsilon^{-\sqrt{ZY}}}{2}\right] + I_0\left[\frac{\varepsilon^{\sqrt{ZY}} + \varepsilon^{-\sqrt{ZY}}}{2}\right] \qquad (12')$$

然 $\frac{1}{2}\left(\varepsilon^{\sqrt{ZY}} + \varepsilon^{-\sqrt{ZY}}\right) = \cosh\sqrt{ZY}$; $\frac{1}{2}\left(\varepsilon^{\sqrt{ZY}} - \varepsilon^{-\sqrt{ZY}}\right) = \sinh\sqrt{ZY}$;

前已言之,是以(11')及(12')兩式可書作

$$E_1 = E_0\cosh\sqrt{ZY} + I_0\sqrt{\frac{Z}{Y}}\sinh\sqrt{ZY}; \qquad (13)$$

$$I_1 = E_0\sqrt{\frac{Y}{Z}}\sinh\sqrt{ZY} + I_0\cosh\sqrt{ZY}. \qquad (14)$$

計算(13)及(14)兩式時可先將Z= 及 $Y = g + jb$ 化為極

標式然後適用 be Moivre 氏定理以求$\sqrt{ZY}$及$\sqrt{\frac{Y}{Z}}$。既得$\sqrt{ZY}$之極標式,可求其直角標式如$\sqrt{ZY}=\alpha+j\beta$者。知$\alpha+j\beta$則可按第九節之(17)及(18)兩公式,展開 Cosh $(\alpha+j\beta)$ 及 Sin $(\alpha+j\beta)$,按常用之表而求其值,爲 $m+jn$ 及 $s+jr$式。既知 Cosh $(\alpha+j\beta)$之式若 $m+jn$ 及$s+jr$ 者,復可按複幻數加法及乘法之定則,而求 E_I 及 I_I 之值。

本篇所欲求之公式,其推演及應用之法則,已詳於前。今爲便於與各近似公式比較起見,先將本節之(13)及(14)兩式,展爲無限級數如次:(展法可叄觀第八節)

$$E_1 = E_0\left(1 + ZY + \frac{Z^2Y^2}{\lfloor 4} + \cdots + \cdots\right) + I_0\sqrt{\frac{Z}{Y}}\left(Z^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}} + \frac{Z^{\frac{3}{2}}Y^{\frac{3}{2}}}{\lfloor 3} + \frac{Z^{\frac{5}{2}}Y^{\frac{5}{2}}}{\lfloor 5} + \cdots + \cdots\right)$$

$$= E_0\left(1+ZY+\frac{Z^2Y^2}{24}+\cdots\right) + I_0Z\left(1+\frac{ZY}{6}+\frac{Z^2Y^2}{120}+\cdots\right) \quad (15)$$

$$I_1 = I_0\left(1 + ZY + \frac{Z^2Y^2}{\lfloor 4} + \cdots\right) + E_0\sqrt{\frac{Y}{Z}}\left(Z^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}} + \frac{Z^{\frac{3}{2}}Y^{\frac{3}{2}}}{\lfloor 3} + \frac{Z^{\frac{5}{2}}Y^{\frac{5}{2}}}{\lfloor 5} + \cdots\right)$$

$$= I_0\left(1+ZY+\frac{Z^2Y^2}{24}+\cdots\right) + E_0Y\left(1+\frac{ZY}{6}+\frac{Z^2Y^2}{120}+\cdots\right) \quad (16)$$

十一　計算長途電線之近似各公式

電線之積電能力係沿全線而均布者,故本題之正確公式必依微積學理而推演之。今若假設其納力聚於線中一點或數點則可得其近似解式如下:

[一]假設全線之納力 Y,聚在線之中心點如第八圖令 A F

爲受電站,則流行於 A F 之電流爲 $\dot{I}_0$, 其電壓爲 $\dot{E}_0$ C D 爲發電站,即流行於 C D 之電流爲 $\dot{I}_I$ 其電壓爲 $\dot{E}_I$。又令在 B E 之電壓爲 $\dot{E}_2$, 流行於 B E 支道之電流爲 $\dot{I}_2$. 如是,則按電學原則而知。

$$\left.\begin{aligned}\dot{E}_2 &= \dot{E}_0 + \dot{I}_0\frac{Z}{2}\\ \dot{E}_I &= \dot{E}_2 + \dot{I}_I\frac{Z}{2}\\ \dot{I}_I &= \dot{I}_0 + \dot{I}_2\\ \text{且}\quad \dot{I}_2 &= \dot{E}_2\, Y \quad \text{(見前第六節)}\end{aligned}\right\}$$

聯解此四方程式消去 $\dot{E}_2$ 及 $\dot{I}_2$, 則得

$$\dot{E}_I = \dot{I}_I\frac{Z}{2} + \dot{E}_0 + \dot{I}_0\frac{Z}{2} = \dot{E}_0 + \frac{Z}{2}(\dot{I}_I + \dot{I}_0)$$

$$= \dot{E}_0 + \frac{Z}{2}(\dot{I}_0 + \dot{I}_0 + \dot{I}_2) = \dot{E}_0 + \frac{Z}{2}[2\dot{I}_0 + Y(\dot{E}_0 + \dot{I}_0\frac{Z}{2})]$$

$$= \dot{E}_0[1 + \frac{ZY}{2}] + \dot{I}_0 Z[1 + \frac{ZY}{4}] \tag{17}$$

$$\dot{I}_I = \dot{I}_0 + \dot{I}_2 = \dot{I}_0 + \dot{E}_2\, Y = \dot{I}_0 + Y(\dot{E}_0 + \dot{I}_0\frac{Z}{2})$$

$$= \dot{I}_0(1 + \frac{ZY}{2}) + \dot{E}_0 Y \tag{18}$$

[二]假設全線之納力 Y,平分聚於線之兩端如第九圖,則得

$$\left.\begin{aligned}\dot{E}_I &= \dot{E}_0 + (\dot{I}_0 + \dot{I}_2)Z\\ \dot{I}_I &= \dot{I}_0 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3\\ \text{且}\quad \dot{I}_2 &= \frac{Y}{2}\dot{E}_0\\ \dot{I}_3 &= \frac{Y}{2}\dot{E}_I\end{aligned}\right\}$$

聯解此四式,消去 $\dot{I}_2$ 及 $\dot{I}_3$,則得

$$\dot{E}_I = \dot{E}_o \left(1 + \frac{ZY}{2}\right) + \dot{I}_o Z, \tag{19}$$

$$\dot{I}_I = \dot{I}_o \left(1 + \frac{ZY}{2}\right) + \dot{E}_o Y \left(1 + \frac{ZY}{4}\right) \tag{20}$$

〔三〕假設全線之納力,有一部分聚於中點,其餘則平分於兩端,如第十圖（此三點所有之納力各為 $\frac{Y}{6}$，$\frac{4Y}{6}$，及 $\frac{Y}{6}$；此分配法,乃依常見之Simpson近似求積法則而定）由是可得下列六式:

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{E}_2 = \dot{E}_o + (\dot{I}_o + \dot{I}_2)\frac{Z}{2};\\
&\dot{E} = \dot{E}_2 + (\dot{I}_o + \dot{I}_2 + \dot{I}_3)\frac{Z}{2};\\
&\dot{I}_2 = \frac{Y}{6}\dot{E}_o;\\
&\dot{I}_3 = \frac{2}{3}Y\dot{E}_2;\\
&\dot{I}_4 = \frac{Y}{6}\dot{E}_I;\\
&\dot{I}_I = \dot{I}_o + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4.
\end{aligned}\right\}$$

聯解此數式,消去 $\dot{E}_2$, $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$, 及 $\dot{I}_4$, 則得

$$\dot{E}_I = \dot{E}_o \left(1 + \frac{ZY}{2} + \frac{Z^2Y^2}{36}\right) + \dot{I}_o Z \left(1 + \frac{ZY}{6}\right) \tag{21}$$

$$\dot{I}_I = \dot{I}_o \left(1 + \frac{ZY}{2} + \frac{Z^2Y^2}{36}\right) + \dot{E}_o Y \left(1 + \frac{5}{36}ZY + \frac{Z^2Y^2}{216}\right) \tag{22}$$

將 (16) 至 (22) 各相當之方程比較之,則近似解法之近似程度,可以窺見矣。