三等分角法二則

周 培 源

三等分角曲線,如巴斯開蝸形線(Limaçon de Pascal),及聶苛默德蚌形線(Conchoid of Nicomedes)等,皆用兩個二等邊三角形互置之理求之,取其理簡法易也。今亦本此理,求得下述二法:

一　第一法

甲. 作圖:——

(1) 以O爲極,OX爲軸,取$OA=a$爲半徑,繞極O作一圓周;

(2) 作OP線,交圓周於Q點;

(3) 連AQ線;

(4) 在OP線上,作PQ線等於AQ;

(5) 連AP線,如是,則P點之軌跡爲一種蝸形曲線,可作三等分任意角之用。

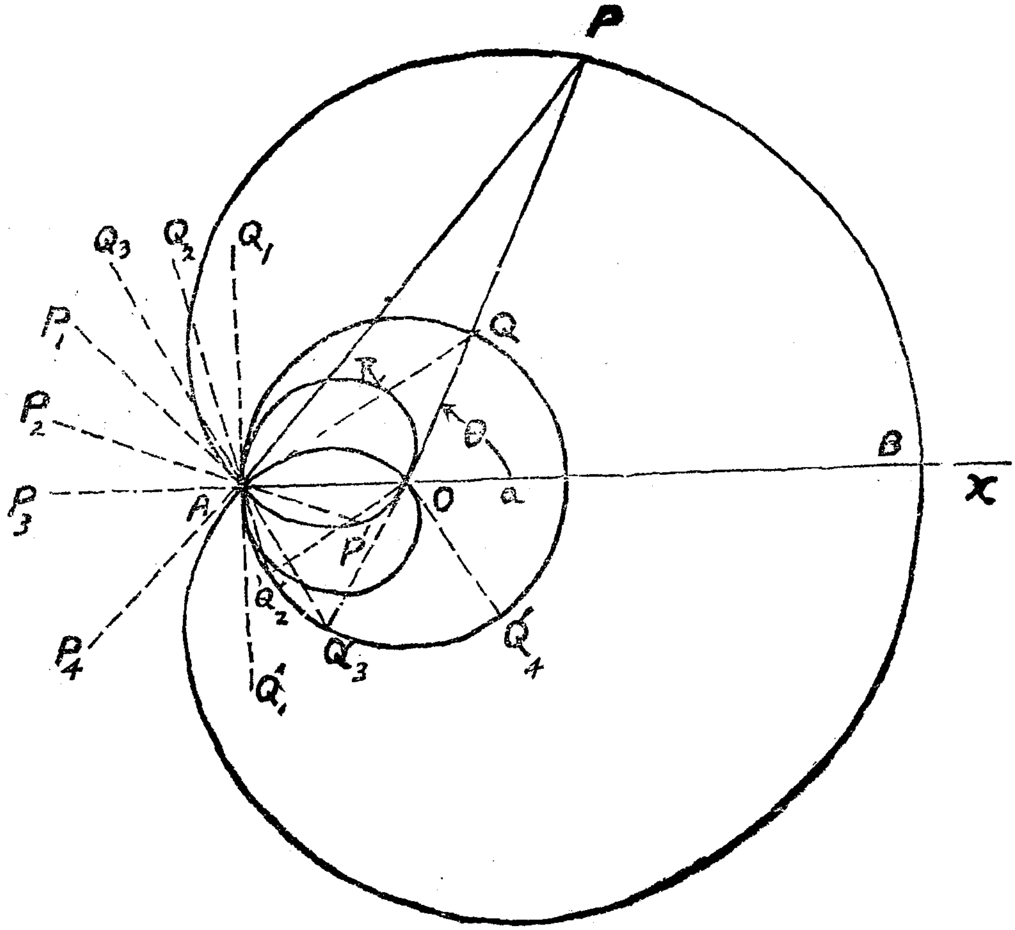
乙. 曲線方程式之推求:——

令　$OP=r=f(\theta)$,

由作法,$OP=OQ+QP=a+AQ$,

但　$$AQ=2a\,\mathrm{Cos}\,\frac{\theta}{2},$$

故　$$r=a\left(1+2\,\mathrm{Cos}\,\frac{\theta}{2}\right).$$



丙. 曲線之討論:——

(1) 此曲線在極軸上下成對稱 (Symmetrical with respect to the polar axisb)。

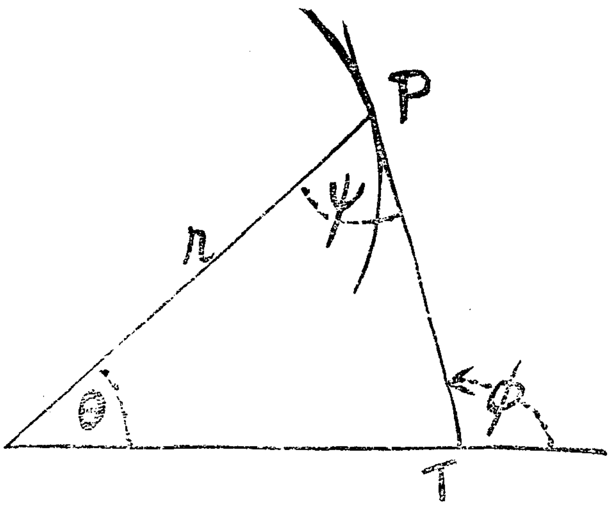
(2) 此線旋轉 4π 即 720° 後,復歸起點,此後再轉,重合原跡。

(3) 此線經過 A 點凡四次,其四次與一次同,亦即重作曲線之起點。其坐標爲 (a, π), (—a, 2π), (a, 3π), 及 (—a, 4π)。經過 O 點凡二次,其坐標爲 $\left(O, \frac{4\pi}{3}\right)$ 及 $\left(O, \frac{8\pi}{3}\right)$。

(4) 過 A 點可作不同向之切線三,如 AP_1, AP_4 及 AQ_1; 過 O 點可作不同向之切線二,如 OQ'_3 及 CQ'_4。各切線之方向,可按點

之已知坐標,推求之如下:——

由微分學理,凡曲線P點上之切線,按圖應有下列二方程之關係,



$$\tan\psi=\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} \qquad (1)$$

$$\tan\phi=\frac{\tan\psi+\tan\theta}{1-\tan\psi\tan\theta} \qquad (2)$$

由本曲線公式 $r=a\left(1+2\operatorname{Cos}\frac{\theta}{2}\right)$

得 $\frac{dr}{d\theta}=-a\sin\frac{\theta}{2}$, $\therefore \tan\psi=-\frac{r}{a\sin\frac{\theta}{2}} \qquad (3)$

在 $A\equiv(a,\pi)$ 時, $\tan\theta=0$, $\tan\psi=-1$, $\therefore \tan\phi=-1$,而 $\phi=135^{\circ}$,

故此時之切線為 AP_1;

在 $A\equiv(-a,2\pi)$ 時, $\tan\theta=0$, $\tan\psi=\infty$, $\therefore \tan\phi=\infty$而 $\phi=90^{\circ}$,

故此時之切線為 AQ_1;

在 $A\equiv(a,3\pi)$ 時 $\tan\theta=0$, $\tan\psi=1$, $\therefore \tan\phi=1$,而 $\phi=45^{\circ}$,

故此時之切線為 AP_4;

在 $A\equiv(-a,4\pi)$ 時, $\tan\theta=0$, $\tan\psi=\infty$, $\therefore \tan\phi=\infty$,而 $\phi=90^{\circ}$,

故此時之切線又為 AQ_1;

在 $0\equiv\left(0,\frac{4\pi}{3}\right)$ 時, $\tan\theta=\sqrt{3}$, $\tan\psi=0$, $\therefore \tan\phi=\sqrt{3}$, 而 $\phi=60^{\circ}$,

故此時之切線為 OQ_3;

在 $\theta = (0, \frac{4\pi}{3})$ 時, $\tan\theta = -\sqrt{3}$, $\tan\psi = 0$, $\therefore \tan\phi = -\sqrt{3}$, 而 $\phi = 120^\circ$,

故此時之切線為 OQ_4';

(5) 此線三環極軸,所包之總面積為 $6\pi a^2$, 可由積分証之如下:——

代曲線公式 $r = a\left(1 + 2\,\mathrm{Cos}\frac{\theta}{2}\right)$ 於面積公式 $A = \frac{1}{2}\int_a^b r^2 d\theta$,得

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b a^2\left(1 + 2\,\mathrm{Cos}\frac{\theta}{2}\right)d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\,3\theta + 2\,\mathrm{Sin}\,\theta + 8\,\mathrm{Sin}\,\frac{\theta}{2}\right]_a^b$$

先令 $a = 0$, $b = \pi$, 得 BPA 所包之面積為 $A_1 = \left(4 + \frac{3\pi}{2}\right)a^2$;

次令 $a = \pi$, $b = \frac{4\pi}{3}$, 得 AP'_2O 所包之面積為

$$A_2 = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3} - 4\right)a^2;$$

末令 $a = \frac{4\pi}{3}$, $b = 2\pi$, 得 ORA 所包之面積為

$$A_3 = \left(\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)a^2;$$

將三數合併而倍之,得　　總面積 $= 6\pi a^2$.

丁. 三等分角方法:——

設 ∠OAP 為一任意角,今欲分之為三等分。

法以角頂 A 置曲線 A 點上,角邊 AO 與極軸 OX 重合,連極 O 與他邊交曲線之點 P, 作 OP 線交圓周於 Q 點,連 AQ 線卽得

$\angle PAQ = \frac{1}{3}\angle OAP$。

證:

從作圖 $OA = OQ$, $AQ = PQ$,

得 $\angle OAQ = \angle AQO, \angle PAQ = \angle APQ$,

但 $\angle AQO = \angle PAQ + \angle APQ = 2\angle PAQ$,

故 $\angle OAQ = 2\angle PAQ$,

$\therefore \angle OAP = 3\angle PAQ$.

戊. 推論:——

按 AQ 線之作法,雖似有方向不定之難處,然苟按下列原則推求,則困難之處卽可渙釋。列例如下:——

(1) 若 $\angle OAP = 135^0$ 如圖中 $\angle OAP_I$ 時,則 AP (今為 AP_I) 為曲線 A 點切線之一,而 AQ (今為 AQ_I) 為圓周 A 點切線之一,故 $\angle P_IAQ_I = \frac{1}{3}\angle OAP_1$;

(2) 若 $\angle OAP > 135^0$ 如圖中 $\angle OAP_2$ 時,則 AP(今為 AP_2)與曲線之交點今在負向 P'_2 點處,連 OP'_2 交圓周於 Q'_2,連 AQ'_2 而反引之,卽得 $\angle P_2AQ_2 = \frac{1}{3}\angle OAP_2$;

(3) 若 $\angle OAP = 180^0$ 如圖中 $\angle OAP_3$ 時,則AP (今為AP_3)與曲線之交點亦在負向 O 點處而 OQ (今為 OQ'_3) 為曲線 O 點切線之一,交圓周於 Q'_3 點,連 AQ'_3 而反引之,卽得 $\angle P_3AQ_3 = \frac{1}{3}\angle OAP_3$。

二 第二法

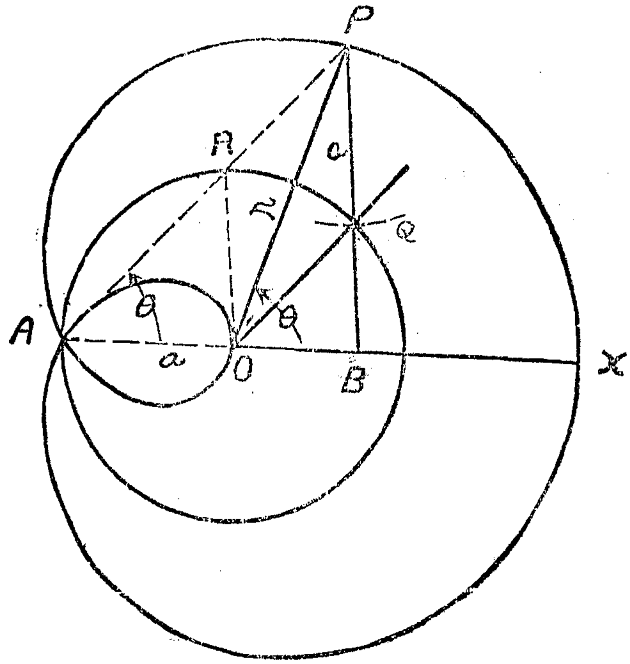
此線之軌跡卽巴斯開蝸形線,惟引用之時,以 O 點為極,法因與舊法稍歧,且所得曲線公式亦與舊法稍異也。

甲. 作圖:——

(1)以極O爲圓心,a 爲半徑,作一圓周;

(2)作$\angle POQ=\frac{1}{2}\ \angle XOQ$;

(3)作 $PQ=OQ=a$,如是則P點之軌跡卽爲一巴斯開蝸形線。



乙. 曲線方程式之推求:——

令 $OP=r=f(\theta)/\angle XOP=\theta$,

則 $\angle POQ=\angle OPQ=\frac{\theta}{3}$,　　$\angle OQP=180^{\circ}-\frac{2\theta}{3}$,

$$\therefore \operatorname{Sin}\angle OQP=\operatorname{Sin}\frac{2\theta}{3},$$

而 $\frac{OP}{\operatorname{Sin}\frac{2\theta}{3}}=\frac{a}{\operatorname{Sin}\frac{\theta}{3}}$,　　卽 $OP=2a\operatorname{Cos}\frac{\theta}{3}$,

$$\therefore r=2a\operatorname{Cos}\frac{\theta}{3}.$$

丙. 曲線之討論:——

上得曲線卽係巴斯開蝸形線,可証之如下:——

作PR線交圓周於R點,使 $PR=OR=PQ=OQ=a$,

因得　$\triangle OPR=\triangle OPQ$,　$\therefore \angle POR=\angle OPR=\angle POQ$;

又因　$\angle ROQ=2\angle POQ$,　$\angle BOQ=2\angle POQ$,

$$\therefore \angle BOR=2\angle BOQ=4\angle POR.$$

連AR線,得　$\angle OAR = \angle ARO$,

但　$\angle OAR = \frac{1}{2}\angle BOR = 2\angle POR = \angle POR + \angle OPR$,

故　$\angle ARO = \angle POR + \angle OPR$,

$\therefore \angle ARO$ 為 $\angle ORP$ 之外角 (exterior angle),

而A,R,P三點均在一直線AP之上。

今試以 $AP = r$, $\angle OAP = \theta$, A為極,求 $r = f(\theta)$。

因　$AP = RP + AR$,　　而 $AR = 2a\,\mathrm{Cos}\,\theta$,

$$\therefore r = a\,(1 + 2\,\mathrm{Cos}\,\theta),$$

此卽巴斯開蝸形線之通用公式,其曲線之性質,已詳普通算書中,茲故不論。

丁. 三等分角方法:——

如欲分一任意角 $\angle XOP$ 為三等分,可使角頂O合於曲線之O點,OX邊與OX極軸相合,自OP交曲線之P點作PQ線,令等於a而交圓周於Q點,則連OQ後,卽得 $\angle PO = \frac{1}{3}\angle XOP$.

戊. 推論:——

如欲分一任意角為n等份,則作圖時,可令

$\angle XOP = n\angle POQ$, 如是則

$$\frac{OP}{\mathrm{Sin}\,\frac{2\theta}{n}} = \frac{a}{\mathrm{Sin}\,\frac{\theta}{n}},\quad \text{卽 } OP = 2a\,\mathrm{Cos}\,\frac{\theta}{n}$$

$$\therefore r = 2a\,\mathrm{Cos}\,\frac{\theta}{n},$$

此方程式卽n等分任意角之曲線公式也。

附言:著按國人之於三等分任意角一題,自立新法者,以愚所知,則有

陳君杜衡,[一]錢君立之,[二]顧君世楫,[三]李君濟三,[四]彭君蔭棠,[五]及周君培源諸人。陳君號芳齋,北洋水師畢業,曾留英習海軍,歷任烟台南京吳淞廣東各處海軍學校總教習,現任上海徐家滙交通大學校長,所著有角度三分器圖說,其法曾由英國格林威海軍學校(Greenwich Naval College)倫白教授(Prof. J. Lambert)校閱,認爲西方之所未見。[六]錢君有二法;顧李彭三君各有一法,俱載中國科學社所發行科學中。顧法與周君第二法實同,惟所得曲線公式略異。李法與陳法同,亦惟所得曲線公式稍歧異。周君三年前曾以第二法示愚,時君尙未學解析幾何故未知所得曲線之爲巴斯開蝸形線,亦未知北京高等師範之數理雜誌,曾載有用巴斯開蝸形線三等分任意角之舊法,及顧君在科學曾創用同樣線以三等分任意角之新法。後周君又獲第一法,且又創見第二法之公式,若變爲 $r=2a\cos\frac{\theta}{n}$,可以等分任意角爲 n 等分之理。愚因周君之第一方法,以愚所知,確係創作;其第二法,雖已有人先行發明;然周君立法立式之簡捷,亦自有特長之可傳,因囑其繕送本雜誌付印。惟周君交稿以後,深恐彼之方法,已經有人發明,囑愚代爲調査,並堅囑如已有人用過,切勿登入,以免勦襲之戾。然就愚力檢査所得,則周君之第一法,固確係中西疇人之所未曾用過,第二法雖非新創,亦有可足研究之價値,因决付諸學報,以供同好之參覽。萬一周君第一法,亦已有人用過,此則非周君剽竊之咎,而愚實負失察之罪,應預聲明,以示責任之有所攸歸。

鄭之蕃識

一.陳著有角度三分器圖說,自刊有單行本。

二.錢有二法一載科學第五卷,第八期,七六二至七六五頁,民國九年,八月出版。一載科學第六卷,第九期,九〇二至九〇五頁,民國一〇年,九月出版。

三.顧法載科學第六卷,第三期,二五三至二五五頁,民國一〇年,三月出版。

四.及五.李法彭法載科學第七卷第四期,三五四至三六三頁民國一一年,四月出版。

六.見陳著角度三分器圖說第六頁。