四次方程求根法

顧毓珍

一　導言

吾人習算學至代數時,每覺三次方程式之求根,已屬複雜,四次方程式則除非有雙等根或他種特殊情形,毫無直捷簡易之方法可以遵循。在學校習算,教師不曰試先求一實根,然後將原有四次方程式消減為三次方程,卽謂可照某種複雜方法慢慢求解。反正練習及考試時,無須用到,而學生亦便以為四次方程式不過列入算學書中備一格而已。殊不知現今科學工程並駕齊進,四次方程式之簡易求根法,實為工程科學中所需要(例如電機工程中瞬時電流之計算等),不特為算學上極有趣的發見也。

按四次方程均可寫作下式:

$$a+bx+cx^2+dx^3+x^4=0 \tag{1}$$

x 為未知數,有根四,a,b,c 及 d 皆為已知係數。

已知係數或全為實數,如 1,2,3,4, 或全為複數,如 1+i2, 3+i4,或實數複數相參雜。下文第二節實係數四次方程求根法,作者自信比尋常一般方法簡單,而且不致有徒勞無功之弊。嘗見某種方法[二]須將原有四次方程式變成

$$p+qx+rx^2+x^4=0$$

然後從此求一三次方程式。而三次方程根尚並非四次方程式之原根。比之下列方法,孰簡孰繁,讀者自可比較,不必費辭。

一, 讀者如僅欲知其實用方法,可逕閱第四節。

二, 例如 R.G. Hudson: The Engineers' Manual 第五頁。

上文曾言解四次方程式時,可先探覓一實根,然後再求其三次根。殊不知四次方程之係數,不妨俱爲實數,而其方程根中正未必有實根。例如下列四根數 $1+i2$, $1-i2$, $3+i4$, $3-i4$ 所組合成之方程式,係數皆爲實數,而四根皆爲複根。是以先求一實根之方法,並不甚妥,因爲吾人須預先測驗某四次方程式之必有一實根,而此一番手續又殊費事也。

再則或以實用科學及工程上,每有相配複根 (conjugate complex roots 如 $1+i2$ 及 $1-i2$ 是),便想出求兩對相配複根之方法[三]。但吾人之不知某四次方程式之必有兩對相配複根正與吾人之不知其必有實根,同一困難。總括說,缺乏普遍應用性的方法,固然有勝於無,然而不免有許多時候,感勞多功少之不便。不但如此,凡不屬於某種規定之下之方根,吾人且將無簡單直捷方法去探求。所以下面第二節的普通解法,或者可以幫助吾人免去許多繁雜而冤枉之探討。

下文第三節複係數四次方程式求根法[四],除於毫無相互關係之三複根或四複根方程,不能應用外,凡遇其他各種實根複根所組成之方程皆可用一簡易方法算解之。其四次方程式係數之爲實數複數相參雜者,亦可以此通法解之。實在說,實數不過是複數之一種特殊情形。例如吾人可以將實數 2,寫爲 $2+io$。所以實係數四次方程求根法,只是複係數四次方程求根法之一部分。讀者可以注意下面,吾人將用同一的求根法,去算解兩種不同係數之四次方程。

三, Prof. N.V. Lyon: Note on a Method of Evaluating The Complex Roots of a Quartic Equation—Journal of Mathematics and Physics, Vol. III, No. 3, April, 1924.

四, 複係數方程之求根法,常人每加忽視,是實由於未知高深科學需要之故。作者因 Lyon 教授以電學中複係數四次方程求根解法相詢,積思累月,始得此解,試演多次,覺尚適用。海內明算君子,倘更進而教之,則幸甚。

但是在複係數四次方程式中,吾人可以利用各虛數之相互關係,而得一更簡易之求根法。

二 實係數四次方程求根法

在
$$a+bx+cx^2+dx^3+x^4=0 \tag{1}$$
內,試以 m_1, m_2, m_3 及 m_4 代四未知根數,並令

$$-(m_1+m_2)=A,\quad m_1m_2=B,\quad -(m_3+m_4)=C,\quad m_3m_4=D,$$

上 m_1 與 m_2 及 m_3 與 m_4 或爲相配複根。由是(1)可寫爲

$$(x-m_1)(x-m_2)(x-m_3)(x-m_4)=(x^2+Ax+B)(x^2+Cx+D)=$$
$$x^4+x^3(A+C)+x^2(B+D+AC)+x(AD+BC)+BD=0 \tag{2}$$

吾人確知(1)既等於(2),則各冪未知數之係數彼此必定相等,因此

$$A+C=d, \tag{3}$$
$$B+D+AC=c, \tag{4}$$
$$AD+BC=b, \tag{5}$$
$$BD=a, \tag{6}$$

按自(1)至(6)各式,所用 A, B, C, D 及 a, b, c, d,均未指明其爲實數或爲複數。惟本節專論實係數方程,故 a, b, c, d 皆爲實數,而 A, B, C, D 因在此實係數方程式內,其根卽含複數亦必相配,故亦必爲實數。

下列爲實係數四次方程之根數的各種可能配合式:

I	實根	等根	II	實根	等根
	實根			實根	
	實根	等根		實根	
	實根			實根	

III	實根		IV	實根	
	實根			實根	
	實根			複根	相配
	實根			複根	
V	實根	等根	VI	複根	相配
	實根			複根	
	複根	相配		複根	相配
	複根			複根	

吾人現在且仔細考究(3)至(6)各方程式。a,b,c及d爲已知係數，A, B, C及D爲未知數。在表面上看來，用四方程式求四未知數，完全可能，但是實際求去，並不如此之易，因爲用尋常聯合增減諸方法都不能得一滿意之結果。下面是作者經過許多無用努力後所得之一個解法：

令 $$B+D=p, \tag{7}$$

代入(4)得 $$p=c-AC, \tag{8}$$

從(4)及(6)， $$2ap=2ac-2ABCD, \tag{9}$$

(5)自乘，得 $$b^2=A^2D^2+2ABCD+B^2C^2 \tag{10}$$

吾人目的在於消去A,B,C及D，是以將(9)與(10)相加，得

$$2ap=2ac-b^2+A^2D^2+B^2C^2, \tag{11}$$

(3)，自乘，復乘a，得 $$ad^2=A^2DB+2ABCD+DBC^2, \tag{12}$$

(9)，(12)相加，得 $$2ap=2ac-ad^2+A^2DB+DBC^2, \tag{13}$$

(11)與(13)相加，得 $$\begin{aligned}4ap&=4ac-b^2-ad^2+A^2D(B+D)+BC^2(B+D)\\&=4ac-b^2-ad^2+(A^2D+C^2B)\,p.\end{aligned} \tag{14}$$

現在吾人須設法消去(A^2D+C^2B)。試以(3)(5)相乘，

$$bd=(A^2D+C^2B)+AC(B+D), \tag{15}$$

$$\therefore\ p(bd)=(A^2D+C^2B)p+ACp^2. \tag{16}$$

(16)減(14),餘 $p(bd-4a)=-(4ac-b^2-ad^2)+ACp^2).$ (17)

(8)乘 p^2,得 $p^3=cp^2-ACp^2.$ (18)

(17)與(18)相加,得下式:

$$p^3-cp^2+p(bd-4a)-ad^2-b^2+4ac=0 \tag{19}$$

至此吾人得一三次方程式,內中A,B,C及D已完全消除。a,b,c及d既皆爲實數,故(19)之係數亦皆爲實數。吾人從此至少可以求得一實根,等於B與D之總和。上文業已證明B與D必爲實數,故其總和亦必爲實數。如(19)有三實根,則B與D總和可以有三種不同之答案,吾人任擇其一卽可,蓋四根如皆爲實數時,每二根相乘,每二積相和,可得三不同之配合也。(參看附錄)。

吾人既得 $p=B+D$ (7),又知 $a=BD$ (6),故知

$$B,D=\frac{+p\pm\sqrt{p^2-4a}}{2} \tag{20}$$

B與D兩數既皆爲實數,則a如爲正數時,所用之p必大於 $2\sqrt{a}$ 方可,若a爲負數則p可爲根據(19)得來之任何實數。同時吾人又知 $A+C=d$ (3)及 $AC=c-p$ (8),因知

$$A,C=\frac{+d\pm\sqrt{d^2-4c+4p}}{2}. \tag{21}$$

至於A,B,C及D之配合,得當與否,可用(5)測驗之。既知A,B,C及D,則四根之尋求,凡稍習代數者皆能爲之矣。

$$m_1, m_2 = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2} \tag{22}$$

$$m_3, m_4 = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4D}}{2} \tag{23}$$

根據 A 與 B 及 C 與 D 之相互關係,可得上面所列實係數四次方程根各種可能之配合。茲再將,上列各款之對照關係列下:

第一款	$A^2 = 4B$, $C^2 = 4D$;	第四款	$A^2 > 4B$, $C^2 < 4D$;
第二款	$A^2 = 4B$, $C^2 > 4D$;	第五款	$A^2 = 4B$, $C^2 < 4D$;
第三款	$A^2 > 4B$, $C^2 > 4D$;	第六款	$A^2 < 4B$, $C^2 < 4D$.

第一款[卽(1)有雙等根時]若確,則下式亦必確:

$$ad^2 = b^2 \tag{24}$$

因(12)減(10),得$ad^2 - b^2 = A^2D(B-D) + BC^2(D-B) = (A^2D - BC^2)(B-D)$,再用 $A = 4B$, $C^2 = 4D$ 代入化之,卽得 $ad^2 - b^2 = (4BD - 4BD)(B-D) = 0$ 也。

按 ad^2 與 b^2 係(19)中之兩項,本爲必計之數。運算時若先將此二項算出,以驗雙等根之存在與否,於事至便。如雙等根之存在,已驗爲可能,吾人可逕將(1)開方以求之。設方根爲

$$(x^2 + Qx + R)^2 = 0, \tag{25}$$

則(1)之各根卽爲

$$m_1 (= m_2), m_3 (= m_4) = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - 4R}}{2} \tag{26}$$

三　複係數四次方程求根法

複係數之四次方程,卽(1)式之 a, b, c, d, 有爲或全爲複數之謂。上文第二節已指出(1)至(6)各方程式,完全普通,並無

任何特別限制。是故四次方程式之係數如皆爲複數,以上各方程式仍爲有效,惟 a, b, c d 及 A, B, C, D 或全爲複數或複實相參雜耳。

吾人且先考察 a, b, c, d 皆爲複數時四次方程之求根法。仿照第二節辦法,吾人以 m_1, m_2, m_3 及 m_4 代表四根。惟吾人須注意如係數中含有複數時,四根不能全實,亦決非爲兩對相配複根。緣在此兩種情形之下,吾人可證其方程之係數,必皆爲實數,與所設必不能相合也。四根或實或複,其各種可能之配合計有八款,表列如下:

I	實根	等根
	實根	
	實根	
	複根	
II	實根	等根
	實根	
	複根	
	複根	
III	實根	
	實根	
	實根	
	複根	
IV	實根	
	實根	
	複根	
	複根	
V	複根	相配
	複根	
	實根	
	複根	
VI	複根	相配
	複根	
	複根	
	複根	
VII	複根	
	複根	
	複根	
VIII	複根	
	複根	
	複根	

實根　　　　複根

吾人試察前述推求(19)式之各步,可知(1)式方根縱含複根如 I 至 VIII 各款時,(19)式之推求,仍可悉照前法,惟因 a, b, c, d 得爲複數,故 p 之推求手續較繁,且遇(VII)及(VIII)二款時,三根盡爲複數,求 p 尤屬費事。雖然,吾人所知三次方程求根法,雖不十分簡易,然較之用原有四次方程暗中試探,尚有難易之別,故(19)式之可以普遍應用,實似大有可取之價值,至三次方程求根之法,以後當於附錄中再討論之。

再,複係數三次方程根之推求,普通固極費事,然在(I)至(VI)二款之下,亦有一簡法可用。蓋爾時四根中,若有二根爲實數或屬相配,則在他二根中,必有一爲獨立複根(independent complex root)故 A 與 B 若爲實數,則 C 與 D 必爲複數。因此吾人遇(I)至(VI)各款時,可以下述簡法,求(19)式中 p 之根數。命 $a=a_1+ia_2$, $b=b_1+ib_2$, $c=c_1+ic_2$, $d=d_1+id_2$, $C=C_1+iC_2$, $D=D_1+iD_2$, 內 a_1, b_1, c_1, d_1, C_1, 及 D_1 代表各複數之實數部份, a_2, b_2, c_2, d_2, C_2, 及 D_2 代表其虛數部份。

據複數原理,凡複數相等時,其實數及虛數必各自相等。是以,上節之(3)至(6)各方程式可以分列爲:

$$A+C_1=d_1, \quad (3a) \qquad AD_1+BC_1=b_1, \quad (5a)$$

$$C_2=d_2, \quad (3b) \qquad AD_2+BC_2=b_2, \quad (5b)$$

$$B+D_1+AC_1=c_1, \quad (4a) \qquad BD_1=a_1, \quad (6a)$$

$$D_2+AC_2=c_2, \quad (4b) \qquad BD_2=a_2, \quad (6b)$$

吾人試以(3a),(4a),(5a)及(6a)與(3),(4),(5),(6)各式相比,則知彼此不同之點,僅在 a, b, c, d, C, 及 D 之有無下標 I。換

言之,若吾人用複係數之實數部分代實係數四次方程式之各實係數時,上文(3)至(6)各方程式完全可以應用。因此,自(7)至(19)各導求式,亦完全有效,惟凡遇 a, b, c, d, C 及 D 時皆須加以下標 1 耳。

所以,如以(19)應用於此種複係數四次方程式,則得

$$p^3 - c_1 p^2 + p(b_1 d_1 - 4 a_1) - a_1 d_1^2 - b_1^2 + 4 a_1 c_1 = 0。 \qquad (19a)$$

從 (19a) 所得之 p_1 即為 B_1 及 D_1 之總和,再與 (6a) 合用,即可得類如(20)之算式。

$$B_1, D_1 = \frac{p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4a_1}}{2}, \qquad (20a)$$

類此又可得

$$A_1, C_1 = \frac{\pm d_1 \pm \sqrt{d_1^2 - 4 c_1 + 4 p_1}}{2}, \qquad (21a)$$

其 A_1, B_1, C_1 及 D_1 之應如何配和,可仿前節,由(5a)之測驗而定之。

至此,吾人已得 A, B 及 C, D 之實數,所餘僅 C, D 之虛數。然而吾人自始至終,尚未探驗所與複係數四次方程式之是否屬於(I)至(VI)各欵之下。根據上面之導求法,可知 (3a), (4a)(5a) 及(6a)決不能再作獨立之對核。但從(4b), (5b), (6b) 吾人又可得複係之相互關係如次:

$$D_2 = \frac{a_2}{B} = \frac{b_2 - BC_2}{A} = c_2 - AC_2, \qquad (27)$$

實可用為測驗(1)式,是否屬於(I)至(VI)欵之助。

A, B, C, D 既已求得,方程式之各根,即可由(22)及(23)兩式推求之。至(23)式內 $C^2 - 4D$ 之複數平方根,可按下述複數原理推求之:

命　$C^2 - 4D = E_1 + iE_2 = r'(\cos 2\theta + i\,\mathrm{Sin}2\theta,)$

內　$r = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$, $2\theta = \tan^{-1}\frac{E_2}{E_1}$。由是得 $C^2 - 4D$ 之平方根為　$r(\cos\theta + i\,\mathrm{Sin}\,\theta) = F_1 + iF_2$,

以此代入(23),則其根卽可求矣。

上列方法,與實係數四次方程求根法完全相仿。吾人亦可進一步說,(19a)乃較(19)為更普通之方式,蓋實係數四次方程式,卽可謂為複係數四次方程式之一種,其特殊情形卽為各係數虛數部分皆等於零。仿此,吾人可以證明凡係數複實叄雜時,上述各算式,依然可以應用。總括起來,吾人對於四次方程式可給以下列普通求根法之結論:

凡四次方程式無論其係數為實數為複數或複實叄雜,除非原式有三或四毫無關係之複根時(此僅於複係數時有之),皆可用(19a)(20a),(21a)(22)及(23)五算式求得其四根。

普通求根法已如上述,惟吾人試再研究,則關於(I)至(VI)款之複係數四次方程式(卽並無三或四'獨立'複根之方程式)更可得一較簡易之求根法。

下法為利用(3b),(4b),(5b)及(6b)相互關係之演算法:

代(3b)入(4b),得　$D_2 + A\,d_2 = C_2$,

代(6b)入上式,得　$\frac{a_2}{B} + A\,d_2 = c_2$,

卽
$$A = \frac{c_2 - \frac{a_2}{B}}{d_2}, \qquad (28)$$

代入(5b),得
$$\left(\frac{c_2 - \frac{a_2}{B}}{d_2}\right)\left(\frac{a_2}{B}\right) + B\,d_2 = b_2, \qquad (29)$$

所以, $$B^3-B^2\left(\frac{b_2}{d_2}\right)+B\left(\frac{a_2\,c_2}{d_2^2}\right)-\frac{a_2^2}{d_2^2}=0. \qquad (30)$$

從此所得之實根即爲B。 既知B,則A可從(28)求得。 A, B,既知,吾人復須試驗原式之是否有三或四獨立複根。 類如(27),可得

$$D_1=\frac{a_1}{B}=\frac{b_1-B\,d_1}{A}+B=c_1-B+A^2-Ad, \qquad (27a)$$

如左右端相等,則(28)及(30)可有根據,而A及B即爲實數,如所得。 以A及B代入(22),則原式四根已可求得其二。

再從(3)及(6),得

$$C=d-A=(d_1-A)+id_2=C_1+iC_2,$$

$$D=\frac{a}{B}=\frac{a_1}{B}+i\frac{a_2}{B}=D_1+iD_2.$$

然後以C及D代入(23),則其他二根亦得矣。

此法較之上述普通求根法,尤爲簡易。 於四次方程式係數複實參雜時,(30)益爲簡單,而求B亦益易。 例如:

如 $a_2=0$, $$B=\frac{b_2}{d_2};$$

如 $b_2=0$, $$B^3+B\left(\frac{a_2c_2}{d_2^2}\right)-\frac{a_2^2}{d_2^2}=0;$$

如 $c_2=0$, $$B^3-B^2\left(\frac{b_2}{d_2}\right)-\frac{a_2^2}{d_2^2}=0;$$

如 $d_2=0$, $$B=-\frac{a_2}{c_2}$$ (按此係由(28)式導出)。

四 四次方程求根法撮要彙錄。

茲爲便讀起見,將上述四次方程求根法彙錄於下:

令所與原式爲 $$a+bx+cx^2+dx^3+x^4=0。 \qquad (1)$$

I. a, b, c 及 d 爲實數:

第一步,從下式求 $p(=B+D)$:

$$p^3-cp^2+p(bd-4a)-ad^2-b^2+4ac=0 \qquad (19)$$

[如 $b^2=ad^2$ 時,原式可有雙等根,可逕將原式開平方,試求等根.]

第二步,從下二式求 A,B,C,D:

$$B,D=\frac{+p\pm\sqrt{p^2-4a}}{2}, \qquad (20)$$

$$A,C=\frac{+d\pm\sqrt{d^2-4c+4p}}{2}, \qquad (21)$$

A, B 及 C, D 之適當配合,用下式測驗之:

$$AD+BC=b. \qquad (5)$$

第三步,從下式求四根:

$$m_1,\ m_2=\frac{-A\pm\sqrt{A^2-4B}}{2}, \qquad (22)$$

$$m_3,\ m_4=\frac{-C\pm\sqrt{C^2-4D}}{2}. \qquad (23)$$

II. a, b, c 及 d 爲複數或複實相雜:

第一法

第一步及第二步,與 I 相同,惟 a, b, c, d 及 C, D 皆代表各該複數之實數部分。

第三步,用下式測驗: $\frac{a_2}{B}=\frac{b_2-BC_2}{A}=c_2-AC_2.$ (27)

第四步,如(27)可以滿足,則 $D_2=\frac{a_2}{B}$, $C_2=d_2$, 即爲 D 及 C 之虛數部分。

第五步,同 I 第三步,惟 C 及 D 爲複數。

第二法

第一步,從下式求 B.

$$B^3-B^2\left(\frac{b_2}{d_2}\right)+B\left(\frac{a_2c_2}{d_2^2}\right)-\frac{a_2^2}{d_2^2}=0. \tag{30}$$

第二步,用下式求 A,

$$A=\frac{c_2-\dfrac{a_2}{B}}{d_2}. \tag{28}$$

第三步,用下式測驗:

$$\frac{a_I}{B}=\frac{b_I-Bd_I}{A}+B=c_I-B+A^2-Ad_I. \tag{27a}$$

第四步,如(27a)可以滿足, $C=d-A$, $D=\frac{a}{B}$:

第五步,同 I 第三步。

上述第一,第二兩法,除遇三或四獨立複根外,可用以推求任何配合之四根。

第三法　各步與I完全相同,惟 a, b, c, d 及 A, B, C, D 皆得爲複數。

按(19)各係數,如皆爲複數時,其根亦可用卡登法 (Carden's Method) 推求。如 p 爲其一根,則由(7)得

$$p=B+D=B_I+iB_2+D_I+iD_2=(B_I+D_I)+i(B_2+D_2),$$

由(20)得(1)式之複根爲

$$B,\ D=\frac{p\pm\sqrt{p^2-4a}}{2}.$$

由此可知,(19)一式實可應用於任何配合之四根,卽(VII),(VIII)兩欵之包含獨立複根,其解法亦已包括其內。

附錄

三次方程求根法

所與原式: $$x^3 + px^2 + qx + r = 0; \tag{37}$$

第一欵:p, q, r 爲複數或實數。

求法: 將 $\left(y - \frac{p}{3}\right)$ 代 x, 改 (37) 爲

$$y^3 + ay + b = 0, \tag{37a}$$

內 $a = \frac{1}{3}\left(3q - p^2\right)$, $b = \frac{1}{27}(2p^3 - 9pq + 27r)$.

(37a)之求根法如下[五]:

讓 $A = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$, $B = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$,

則(37a)之三根當爲:

$$Y = A + B,\ -\frac{A+B}{2} + i\frac{3}{2}(A - B),\ -\frac{A+B}{2} - i\frac{3}{2}(A - B).$$

次由 $x = y - \frac{p}{3}$, 將 x 即可之各根一一求得。

第二欵:p, q, r 爲實數。

求法:係數既皆爲實數,則三次根中必有一實根。據此,可先用試探法求一實根,m。既知 m,可將原式化成

$$x^2 + Mx + N = 0; \tag{38}$$

內 $M = p + m$, $N = -\frac{r}{m}$ 解之卽得其餘二根爲

$$X_{1,2} = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - 4N}}{2}, \tag{39}$$

因此吾人且知: 如 $$(p + m)^2 < -\frac{4r}{m}, \tag{40}$$

則原式必有相配複根。

五, Hudson: The Engineers' Manual p. 4.

原書並未指明是法可以用於複係數,但經詳加考察並施以實例,則是法確可通用。 例如從 $x^2 + (5 - i.866)x + (707 + i707) = 0$,