釋必然

金岳霖

如果論理學的定義一狹義的定義一是研究命題與命題間的必然關係的學問,則論理一論理學的對象一的性質也就包含必然的性質。我們似乎能進一步說,論理的性質就是必然。必然二字的意義頗不易說。普通生活中所用的必然二字,其意義似乎有極不一致的情形。我們至少可以分作三類,而每類中尚可以有各種不同的必然的意義。三類的必然卽(a)心理方面的必然,(b)事實方面的必然,(c)論理方面的必然。

A.(a)心理方面的必然。此種必然差不多限制到個人的感覺方面。有時一個人對於一件事體覺得非這樣或那樣辦不成;他的朋友或親近雖以種種的方法去勸止他,而終於毫無結果。這種情形在普通生活中非常之多,尤其是感情方面的事。失戀可以生"必"死之心,仇讎可以存"必"報之志。此種"必"完全是心理方面的必,有旁觀與當局的分別。據說有一乞丐求助於福祿特耳,福祿特耳說"我爲什麼要幫助你呢,"乞丐說"先生,我一定要活才行。"福祿特耳說"我不覺得一定。"此處因旁觀者與當局者的感覺不同,而所謂"一定"者也有不同的意義。

(b)事實方面的必然。此種必然不是個人的心理問題。我們似乎可以分作兩層討論:一從經驗中的事實討論,一從自然科學中的事實討論。經驗中事實的必然有如蘇老先生的勢有"必"至。"月暈而風,礎潤而雨"似乎是統計方面

的大約,很有例外的可能,根本就沒有必然。

自然科學中的事實的"必然,"其理論的成分很重。我們要知道這種事實的必然的性質,最好是從表示這些事實的自然律着想。自然科學中的自然律可以分爲以下兩種;一爲統計的自然律,一爲實然的自然律。還有第三可能,但因此第三可能涉及論理方面的必然,在此暫不提出討論。

(一)統計自然律。如果我們以A, B,代表東西或事體或事實的類稱,以a, b,代表東西或事體或事實的個體,φ'代表屬性,R′代表關係,$\nrightarrow$代表不能推論,則統計自然律的統計性質可以有以下的表示:

1.1 $\varphi' A \nrightarrow \varphi' a$

1.2 $AR'B \nrightarrow aR'b$

這就是說A類雖有φ'的屬性而我們不能推論到A類中任何分子a也有φ'屬性。A, B,兩類雖有R′的關係,而我們不能推論到A類中任何分子a與B類中一分子b,也有R′的關係。

在此情形之下,我們可以說統計自然律所表示的事實中僅有或然而無必然。

(二)實然自然律。我們利用以上相似的符號,加上"$\rightarrow$"代表可以推論,則實然自然律可以有以下的表示:

2.1 $\varphi^2 A \rightarrow \varphi^2 a$

2.2 $AR^2B \rightarrow aR^2b$

這就是說A類有φ^2屬性,a也有φ^2屬性;A與B兩類有R^2的關係,a與b也有R^2的關係。這種自然律大約要有精密的實驗,嚴格的定義才能發現。

我們似乎可以說實然自然律所表示的事實有"必然。"可是這裏的"必然"二字的意義是"一定"或"固定"的意思。如果我們說在Y條件滿足之後,X對於Y有這種事實方面的"必然",我們不過是說除X之外沒有別的可能。

事實之有必然與否卽在今日仍是問題。但是,卽令我們承認事實有必然,而此"必然"亦非我們所要提出的論理方面的"必然。"

(c)論理方面的必然是兩命題或多數命題的關係。命題的關係很多,可是爲討論必然的性質起見,最便利的方法似乎是從兩種包涵(Implication)關係着手。一種是對稱的(Symmetrical)包涵關係,一種是非對稱的包涵關係。後一種包涵可以分許多小類,這些小類我們現在不必討論,我們所要提出是它們的共同的性質。

爲便利起見我們把包涵限制到兩命題的包涵。如果一命題包涵另一命題,我們稱前一命題爲前件,後一命題爲後件。如果前件包涵後件而後件不包涵前件,此包涵爲非對稱的包涵;如果前件包涵後件,後件也包涵前件,則此包涵爲對稱的包涵。

包涵關係不必是兩命題的意義關係,可是在此處我們要把它限制到意義的關係。在非對稱的包涵,前件與後件的意義不相等;在對稱的包涵,前件與後件的意義相等。

如果兩命題有以上任何一種意義方面的包涵關係,則此兩命題均有必然的關係。不對稱的包涵關係中所有的必然也不對稱:那就是說承認前件必承認後件,而承認後件不必承認前件。對稱的包涵關係中所有的必然也是對稱

的:那就是說,承認前件必承認後件,承認後件也必承認前件。

假如有兩個演譯系統,在第一個系統之內,命題與命題間有以上兩種必然,而在第二個系統之內命題與命題之間僅有第二種必然。那麼,在前一系統由最初幾命題可以推到最後幾命題,可是由最後幾命題不能推論到最初幾命題;而在第二系統內,不但由最初幾命題可以推論到最後幾命題,而且由最後幾命題也可以推論到最前幾命題。

以上二種必然均是論理方面的必然。如果論理僅有第一種必然,則論理的系統,充其量不過是內部一致而已,不能有普遍的用處。它的地位,在這種情形之下,與歐克里幾何的地位相似。歐克里幾何的內部雖一致(究竟一致與否現在可以不管)而有時我們能引用它,有時不能引用。如果論理系統僅有以上第一種必然,則論理系統雖"對"而它的用處不能普遍,用處既不普遍,則論理不能作各種科學的共同工具。

可見除以上第一種必然之外,論理系統還要有第二種必然。

B. 在未討論論理方面第二種必然之前,我們可以提出一青年所難免發生的問題。作者在十幾年前與同學清談時,就不免表示對於算學家有十分的景仰。尤其使他五體投地的就是算學家可以坐在書房寫公式,不必求合於自然界而自然界卻毫不反抗地自動地承受算學公式。這問題在許多讀者們中或者根本沒有發生過,或者發生過而自己有相當的解釋亦未可知。作者對於此問題,以算學素非所習,所以談不到解釋的方式。近年經奧人維特根斯坦與英

人袁烕西的分析才知道純粹算學,至少他們所稱爲純粹算學的算學,或論理學,有一種特別的情形。此情形即爲以上所稱爲論理方面第二種的必然,或窮盡可能的必然。對於這種必然我們可以分以下三層討論。

(a)要知道此種必然的性質,我們最好先談談二分法。設以X代表任何東西或事體或事實或思想,如果我們引用二分法,即有X與非X的正反的分別。如果X代表類稱,引用二分法後,即有正反兩種類稱,那就是,X與$\overline{X}$(非X)。

這種正反兩分別的變類要看原來的類稱數目多少。有X與Y兩類,引用二分法後,就有四種不同的類稱。如果以$\overline{X}$代表反X類,$\overline{Y}$代表反Y類,這四種類稱如下:

XY, $X\overline{Y}$,

$\overline{X}Y$, $\overline{X}\overline{Y}$,

如果我們有X, Y Z, 三類稱,引用二分法後,就有以下八類:

XYZ, $\overline{X}YZ$, $X\overline{Y}Z$,

$XY\overline{Z}$, $\overline{X}\overline{Y}Z$, $X\overline{Y}\overline{Z}$,

$\overline{X}Y\overline{Z}$, $\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$。

由此們們可以看出如果我們以2表示正與反兩分別,n代表原來類稱數目,引用二分法後,所能有的類稱的總數爲“2^n”。

以上是以二分法引用於類稱,可是當然不必限制到類稱方面。現在研究論理學的人似乎都覺得命題比類稱還要根本。這一層在此處不必討論。我們所注意的是二分法之引用於命題方面與用之於類稱方面是一樣的。命題也可以有正與反。普通以正爲眞以反爲假,我們可以照辦。

可是我們不要把眞假看得太呆板,專從論理方面說,它們不過是正與反兩絕對分別中之一種解釋而已。

如果我們有一個命題p,引用眞假二分法後,就有以下眞假兩可能。

p, $\bar{p}$。

如果有兩個命題p與q,引用二分法後,就有以下四可能:

pq, $p\bar{q}$,

$\bar{p}q$, $\bar{p}\bar{q}$。

如果有三個命題p, q,與r,引用二分法後,就有以下八個可能:

pqr, $\bar{p}qr$, $p\bar{q}r$

$pq\bar{r}$, $\bar{p}\bar{q}r$, $p\bar{q}\bar{r}$

$\bar{p}q\bar{r}$, $\bar{p}\bar{q}\bar{r}$。

這種可能我們稱爲眞假可能。它的公式爲“2^n”,與類稱方面的正反可能一樣。

(b)類稱方面的正反可能有正反可能的函數,命題方面的眞假可能有眞假可能的函數。我們從最簡單的例着手。一個命題p,引用二分法後,有眞假兩可能,我們最好用以下方式表示這兩個可能:

p

1,	眞
2	假

可是對於這兩個可能,我們從承認與否認方面着想,可以有四種不同的態度,或者說有四種眞假可能的函數。這四種

不同的態度,可以表示如下:

	1	2
a,	眞	眞
b.	眞	假
c,	假	眞
d,	假	假

以上"1"與"2"代表一命題的眞假兩可能,"a" "b" "c" "d"代表四種不同的態度,或眞假可能的函數。原來的眞假兩可能是兩個命題:一個說 p 是眞的,一個說 p 是假的。"a", "b", "c", "d", 四個不同的態度是四個不同的命題如下:

"a" ——「"p 是眞的"是眞的或"p 是假的"是眞的。」

"b" ——「"p 是眞的"是眞的而"p 是假的"是假的。」

"c" ——「"p 是眞的"是假的而"p 是假的"是眞的。」

"d" ——「"p 是眞的"是假的"p 是假的"也是假的。」

以上四命題中,"b"與"c"可以不必提出討論,因爲它們只承認眞假兩可能中之一可能。"b"命題不過是說"p 是眞的,"因"p 是假的是假的"等於"p 是眞的。" "c"命題不過是說"p 是假的,"因爲"p 是眞的是假的"等於"p 是假的。"

"a"與"d"兩命題有特別的情形。"d"命題對於原來的兩可能均不承認。原來的眞假兩可能一方面彼此不相容,另一方面彼此窮盡;事實上的情形無論若何的複雜不能逃出二者範圍之外。換句話說,所有的可能都包括在原來兩可能之中。若將所有的可能均否認之是不可能。"d"

命題旣否認所有的可能,是一不可能的命題,那就是說是一矛盾的命題。

"a"命題與"d"命題的情形恰恰相反。"a"命題把原來任何可能都承認了。"d"命題不能是眞的,而"a"命題則不能是假的。這兩個命題的眞假與尋常命題的眞假不同。尋常命題或者是眞的或者是假的,而這兩個命題中一個不能不假,一個不能不眞。

我們要記得"a"命題說"p是眞的是眞的或者p是假的是眞的。"這不過是說"p是眞的或者p是假的。"我們可以用一個很尋常的命題來試試。假如我們說:"這個東西或者是棹子或者不是棹子,"這句話無論如何是不會錯的。所謂"這個東西"者旣可以是棹子,而不是其它的東西,但也可以是人,或者是椅子,或者是米,或者是西瓜……等等。可是無論它是什麽,它都可以容納到"是棹子或者不是棹子"的範圍之內。照此見來"a"命題無往而不眞,我們不能否認它,因爲在引用二分法條件之下它承認所有的可能。

們也要注意"a"命題這樣的命題對於具體的事實或自然界的情形根本就沒有一句肯定的話。這種命題旣不限制到一個可能而承認所有的可能,在無論甚麽情形之下,它都可以引用。這就是承認所有可能的"必然"命題。

以上不過是就一個命題而說的話,如果有p,q兩命題,原則一樣,不過眞假可能加多而已。p與q兩命題的眞假可能有四個如下:

pq pq

pq pq

而這四個眞假可能的函數則有十六個。那就是說,我們對於這四個可能可以有十六個不同的命題表示十六個不同的態度。此十六個命題之中有一個不可能的命題,有一個必然的命題。前者否認所有的可能,後者承認任何可能。

如果我們有三個命題如 p, q, r, 我們有八個眞假可能,有二百五十六個眞假可能的函數。那就是說,我們可以有二百五十六個命題,表示對於這八個可能有二百五十六個不同的態度。這些命題之中有一個否認所有的可能,所以是矛盾的命題;有一個承認任何可能所以是必然的命題。

(c)凡從以上所討論的必然的命題所推論出來的命題都是必然的命題。這句話容易說,而不容易表示,更不容易證明。現在姑就容易着手的一方面,表示論理學的基本命題是方才所說的這一種必然的命題。論理學與算學或者是已經打成一片,或者是可以打成一片,或者是根本不能打成一片;但無論如何在 Principia Mathematica 的定義範圍之內它們是已經打成一片。這部書的基本命題也就是它的論理學與算學的前提。我們可以看看這些基本命題是否是必然的命題。

Principia Mathematica 第一章(在 1910 版中)有六個基本思想,一個基本定義,十個基本命題。基本命題之中,有五個是用符號表示的,有五個是用普通語言表示的。後者之中有兩個是推論的規律。以語言表示的基本命題應否視為此系統的基本部分,頗發生疑問。無論如何本文可以不去管它們。我們在此處僅表示所有以符號表示的五個基本命題都是必然的命題。

1.0.1 $p \supset q = \sim p \vee q$ Df.

這是基本定義。我要利用這個定義去表示以下五個基本命題都是必然的命題。我們要知道:

$\sim p \vee q = \sim pq \vee pq \vee \sim p \sim q.$

以上"$\sim$"代表"非"或"反,""$\vee$"代表"或者。"

1.2. $\vdash$: $p \vee p . \supset . p$ Pp.

這是第一個以符號表示的基本命題。照以上的定義它可以變成以下的形式:

$= \sim (p \vee p) \vee p$

$= \sim p \sim p \vee p$

$= \sim p \vee p$

這個命題說"p 或者是假的或者是眞的。" 一個命題 p 只有這兩個可能,若此兩可能之中任何一可能均爲此基本命題所承認,它一定是必然的命題。

1.3. $\vdash$: $q . \supset . p \vee q$ Pp.

照以上的基本定義,這命題可以變成以下諸形式:

$= \sim q \vee (p \vee q)$

$= \sim q \vee (pq \vee p \sim q \vee \sim pq)$

$= p \sim q \vee \sim p \sim q \vee pq \vee p \sim q \vee \sim pq$

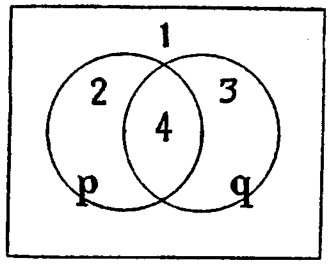
$= p \sim q \vee \sim p \sim q \vee pq \vee \sim pq$

1.4. $\vdash$: $p \vee q . \supset . q \vee p$ Pp.

$= \sim (p \vee q) \vee (q \vee p)$

$= \sim p \sim q \vee pq \vee \sim pq \vee p \sim q$

p 與 q 兩命題的眞假可能可用下圖表示:



$1=\sim p\sim q$　　　$2=p\sim q$

$3=\sim pq$　　　$4=pq$

以上1.3與1.4兩基本命題把 p 與 q 所有的眞假可能中的任何可能均承認之,所以它們都是以上所討論的必然命題。

1.5.　$\vdash: \ p\vee(q\vee r).\supset.q\vee(p\vee r)$　Pp.

根據同樣辦法,這一個命題可以有以下的形式上的變化:

$=\sim[p\vee(q\vee r)]\vee[q\vee(p\vee r)]$

$=\sim[p\vee(q\sim r\vee qr\vee\sim qr)]\vee[q\vee(p\sim r\vee pr\vee\sim pr)]$

$=\sim p\sim q\sim r\vee[q\vee(p\sim r\vee\sim pr\vee pr)]$

$=\sim p\sim q\sim r\vee\sim pq\sim r\vee\sim p\sim qr\vee p\sim q\sim r\vee p\sim qr\vee pq\sim r\vee\sim p$
$qr\vee pqr$

1.6.　$\vdash:. \ p\supset r.\supset:p\vee q.\supset.p\vee r$　Pp.

我們可以先把以上命題分成兩部,用同樣的辦法改變它的形式。

$p\supset r=\sim q\vee r$

$=\sim q\sim r\vee\sim qr\vee qr$

而　$p\vee q.\supset.p\vee r=\sim(p\vee q)\vee(p\vee r)$

$=\sim p\sim q\vee(p\sim r\vee\sim pr\vee pr)$

所以整個的命題是:

$[\sim q\sim r \vee \sim qr \vee qr] . \supset . [\sim p\sim q \vee (p\sim r \vee \sim pr \vee pr)]$

而這照基本的定義有以下的形式:

$\sim[\sim q\sim r \vee \sim qr \vee qr] \vee [\sim p\sim q \vee (p\sim r \vee \sim pr \vee pr)]$

$= q\sim r \vee [\sim p\sim q\sim r \vee pqr \vee \sim pqr \vee \sim p\sim qr \vee pq\sim r \vee p\sim q\sim r$

$\vee \sim p\sim qr]$

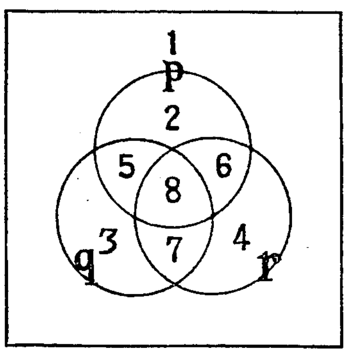
可是 $q\sim r$ 對於 p 有兩個可能: $pq\sim r$ 與 $\sim pq\sim r$, 所以以上又等於:

$pq\sim r \vee \sim pq\sim r \vee \sim p\sim q\sim r \vee pqr \vee \sim pqr \vee \sim p\sim qr \vee pq\sim r \vee$

$p\sim q\sim r \vee \sim p\sim qr.$

此中 $pq\sim r$ 一可能重複,但毫無妨碍。

p, q, r 三命題的眞假可能共有八個,玆以圖表示如下:



$1 = \sim p\sim q\sim r$	$2 = p\sim q\sim r$
$3 = \sim pq\sim r$	$4 = \sim p\sim qr$
$5 = pq\sim r$	$6 = p\sim qr$
$7 = \sim pqr$	$8 = pqr$

以上1.5與1.6兩基本命題把 p, q, r, 所有的眞假可能中的任何可能均承任之,所以它們也是以上所討論的必然命題。

Principia Mathematica 的十個基本命題中,五個以語言表示的都沒有"⊢"符號。沒有這個符號,表示這部書的作者

沒有肯定的說這些命題是眞的。可是五個以符號表示的命題都有“⊢”符號,那就是說,這部書的作者肯定的說這些命題都是眞的。照以上的分析,這五個以符號表示的命題不但是眞而且都是必然的命題。