規範場
規範場

規範場（對稱決定力量）—楊振寧

明哲

自然界有兩個重要的性質，一個是對稱；另一個是不對稱。（廢話！）這兩種事物的形態都可能表現出規律，對稱本身無疑的是一種規律。物理既然是找尋規律的科學，對稱因此扮演一定的角色。事實上，近世的物理學正是起源於人們對天上「球體的音樂」的探究。對稱、隱藏的結構、定律的發現和「性」一樣會觸動人們本能的歡愉。規範對稱也是如此，在欣賞它的美感之前得先知道「規範」的指爲何。

電磁學裏的規範變換

規範就是「標準的尺度」；英文裏的 gauge 就是「calibrator」。電磁學裏的規範變換之所以用規範變換這個名稱是因爲Weyl 在西元 1919 年曾試著把

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda$$

解釋爲一種「換尺關係」。這個想法是廣義相對論的延續，廣義相對論是純幾何的理論，時空的彎曲代表重力的效應。在平常二維的球面上將一個切於北極的向量平行於球面移到赤道時就不再是原來的向量了。同樣地，切於四維時空曲面的向量位移一小段距離後會生出一個小差量 δA^{μ}，

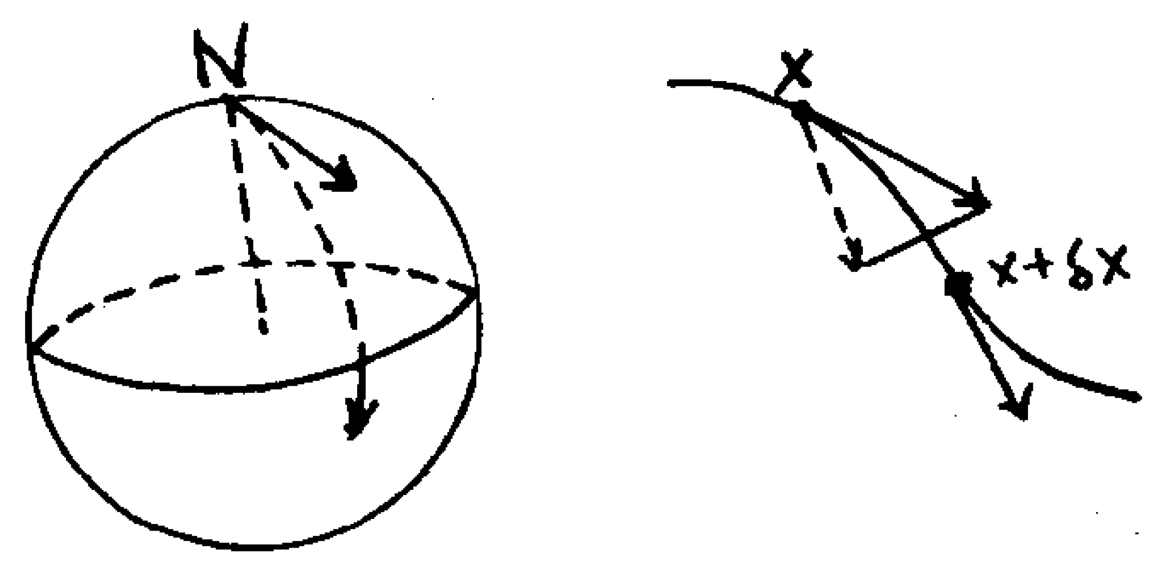


fig (1)

（$\mu = 0, 1, 2, 3$），它應該正比於原來向量及位移的大小，位移很小的時候這種比例應該是線性的。因此我們可以寫出 $\delta A^{\mu} = \Gamma^{\mu}_{rs} A^{r} \delta x^{s}$，$\Gamma^{\mu}_{rs}$ 是比例係數，通常稱爲「連絡」（connection）係數，它就代表著重力的效應。類似地，如果我們使時空中不同的點有不同的尺度（space-time dependent scale），以

函數S（x）表示，則一個純量f位移一小段距離後會生出一個小差量：

$$\delta f=\frac{\partial S}{\partial X^{\mu}}\ f\Delta X^{\mu}$$

。比例係數是 $s_{\mu}\ (\equiv\frac{\partial S}{\partial X^{\mu}})$，有四個分量，和電磁位$A^{\mu}=(\phi,\vec{A})$的分量數目一樣。Weyl 因此假設$s_{\mu}$就是$A^{\mu}$。也就是說，電磁位的存在使時空各點的尺度不同，而規範變換就是尺度變換。不過，這個想法並不正確。

二　正確的想法

究竟電磁場影響了時空還是物質？（這裏的時空指的是有距離構造的東西）在Schrödinger 提出了波動方程之後 Weyl 的觀點有個比較好的解釋，在這個解釋中電磁場影響的是物質。這很容易說明，沒有電磁場時的波動方程是：

$$\frac{1}{2m}(-\hbar\nabla)^{2}\varphi=E\varphi \qquad (1)$$

加了磁場的波動方程是：

$$\frac{1}{2m}(-\hbar\nabla-\frac{e}{c}\vec{A})^{2}\varphi'=E\varphi'$$

不難看出：

$$\varphi'(x^{2})=\exp\left[\frac{ie}{\hbar c}\int_{0}^{c(x)}A(x')\cdot d\vec{c}'\right]\varphi(x^{2}) \qquad (2)$$

這裏的指數部份（phase factor）就像前面的S(x)(Scale factor)，連絡係數$\partial_{\mu}S(x)=\frac{ie}{\hbar c}\vec{A}(\vec{X})$ 除了差個乘數外正是磁場的向量位。所以Weyl 的觀點應該修正爲：電磁位的存在使波函數的相位改變，而規範變換就是相位變換。

對於$\vec{A}\to\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\Lambda(\vec{X})$

有$\varphi'\to\varphi''=e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda(\vec{x})}\varphi'$

（由(2)，並定$\Lambda(0)=0$。）

相場$\Lambda(\vec{x})$的選擇是任意的（當然它本身有一些限制，例如取Lorentz 規範時必須要 $\Delta^{2}\Lambda-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}\Lambda}{\partial t^{2}}=0$）。以另一個角度來看，我們先給出一個沒有交互作用場的空間，Schrodinger 方程形如(1)式。然後在空間中「設定」一個相場$\Lambda(\vec{x})$，並「要求」波動方程在這個操作後形式應保持不變（gauge covariance），則我們可以看出(1)式必須略做修改，因爲：

$$\varphi\xrightarrow{\text{set up}\ \Lambda(\vec{x})}\varphi'=e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda(\vec{x})}\varphi$$

使得：

$$\nabla\varphi\longrightarrow\nabla\varphi'\neq e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda(\vec{x})}\nabla\varphi$$

如果我們能找到一個算符$D\equiv\nabla-\frac{ie}{\hbar c}\vec{A}$

使它滿足$D'\varphi'=e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}D\varphi$，　則

$$\frac{1}{2m}(-i\hbar D)^{2}\varphi=E\varphi$$

就是滿足規範協變性的方程式。不難算出

$$D\varphi\to D'\varphi'=e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}D\varphi$$

只要$\vec{T}=\underbrace{\vec{T}+\nabla\Lambda}_{\Delta}$。$\vec{T}$的性質說明了它是經驗世界中的向量位，所以Weyl 的想法多少是實現了，設定一個尺度場S($\vec{x}$)(這裏是 $\exp(\frac{ie}{\hbar c}\Lambda)$)，要求方程的規範不變性，電磁場自然就浮現了。上面只處理向量位而無純量位是因爲 Schrödinger 方程是非相對性的方程，ϕ和$\vec{A}$並不形成四向量而難以一併討論。相對性觀點(Dirac eq.)(見F. Halzen, Quarks & Leptons., Ch.14)。

規範對稱(協變)和重力理論中的廣義協變性有相似之處，兩者都可被稱爲「動力對稱(Dynamic sym.)，以與通常的平移對稱，轉動對稱區別。前者能定出交互作用的型式，後者能定出守恒量。

三 Yang-Mills 的規範場[1]

先複習一個名詞

同位旋：如果質子不帶電，則質子和中子實在沒什麼不同(不考慮內部的夸克結構)，我們可以把質子和中子看成是同一種粒子的不同狀態，即同位旋向上和向下。同位旋和眞實空間的轉動並無關係，用同位「旋」這個名稱是因爲描述它的數學結構和描述電子自旋的完全相同(都是SU(2)群。向上或向下這種形容詞也只是借自自旋，「同位」則源於「同位」素。

實驗顯示，在「强交互作用」的反應中，同位旋總是守恒的。如同楊振寧和Mills 在1954年的論文中所說的(Phy. Rev. Vol.96, p.191)：「同位旋守恒等於是所有交互作用在同位旋轉動下應具有不變性。這表示當電磁作用可被忽略時，同位旋的「指向」並無物理意義。於是質子和中子的區分純粹是任意的。……在這篇論文中，我們想在時空中不同的點給予獨立的同位旋轉動，然後要求所有的交互作用在這種情況下不變。」這個觀念是電磁學的相因子場 $\exp(\frac{ie}{\hbar c}\Lambda(x))$ 的推廣。

考慮二分量波函數 $\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_p\\ \varphi_n\end{pmatrix}$，$\varphi_p$，$\varphi_n$分別是同位旋的兩種狀態。描述「質子一中子」系統的拉氏密度[2]是(別管怎麼得到的)

$$\mathcal{L}=\sum_{\mu=1}^{4} i\varphi r^{\mu}\partial_{\mu}\varphi-m\bar{\varphi}\varphi,\ \hbar=c=1 \quad (3)$$

其中 $\bar{\varphi}\equiv\varphi^{+}r^{0}$，$r^{0}$ 或 r^{μ} 都是矩陣，

$$\partial_{\mu}\equiv\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}。$$

類似於 $\varphi\rightarrow\varphi'=\exp(\frac{ie}{\hbar c}\Lambda)\varphi$，我們「在時空中不同的點給予獨立的同位旋轉動。」(設定規範場，這裏「場」指的只是一個時空的函數。

$$\begin{pmatrix}\varphi_p\\ \varphi_n\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\varphi_p'\\ \varphi_n'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\ c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_p\\ \varphi_n\end{pmatrix} \quad (4)$$

$u=\begin{pmatrix}a&b\\ c&d\end{pmatrix}$是個su(2)矩陣，也就是說 $u^{+}u=1$ 且 $\det u=1$。一個極端情況是 $\begin{pmatrix}\varphi_p'\\ \varphi_n'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_n\\ \varphi_p\end{pmatrix}$，變換後質子，中子的角色互換了。

SU(2)矩陣 u 可以寫成 $u(\vec{\theta}) = \exp(1\overset{2}{\vec{\sigma}}.\overset{2}{\vec{\theta}})$，（見 Arfken， Math. methods for physicists， ch 4），$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 是 su(2) 矩陣的三個生成元（generator），滿足 $[\sigma_i, \sigma_i] = i\sigma_k$。由於 $[\sigma_j, \sigma_i] \neq 0$，su(2) 因此是不可交換群（Non-Abelian group）。$\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 是三個和變換有關的參數。

把(4)代入(3)裏面，我們發現 $\mathcal{L}$ 並非規範協變。因爲 $u\varphi\gamma^\mu\partial_\mu(u\varphi)$

$$= \varphi u^+\gamma^\mu[(\varphi_\mu)\varphi + u\partial_\mu\varphi]$$
$$= \varphi\gamma^\mu u^{-1}(\partial_\mu u)\varphi + \varphi\gamma^\mu\partial_\mu\varphi$$
$$= \varphi\gamma^\mu\partial_\mu\varphi \qquad (\because u^+u = 1)$$

如果要求 $\mathcal{L}$ 是規範協變的，則它必須稍做修改。我們必須有個新的 $D_\mu = \partial_\mu - i\epsilon B_\mu$（$B_\mu$ 是四個 2×2 矩陣，ϵ 是個常數）使得

$$D'_\mu(u\varphi) = uD_\mu\varphi \qquad (5)$$

不難算出，只要 B_μ 依 $B'_\mu = u^{-1}B_\mu u + \frac{i}{e}(\partial_\mu u)u^{-1}$ 的方式變換就可以使(5)式成立。我們可以把 B_μ 以 σ_i 展開，

$$B_\mu(x) = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{y}_\mu(x)}{2}$$

，y_μ 的規範變換也可以求出來。（式子有點複雜）

規範變換下協變的拉氏密度是

$$\mathcal{L} = \sum_{\mu=1}^{4} i\bar{\varphi}\gamma^\mu\left(\partial_\mu - i\epsilon\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{y}_\mu}{2}\right)\varphi - m\bar{\varphi}\varphi$$

所以，僅要求規範協變原理，我們就可以找出一些新的交互作用項 y_μ，它有 12 個分量。這個 y_μ 場在自然界眞的存在嗎？有個推廣的 Bohm-Aharonov 實驗可以回答這個問題（後詳）。至少我們知道它不是傳遞核力的 π 介子場，因爲 y_μ 場量子是沒有質量的（$\mathcal{L}$ 中的質量項將會破壞規範協變性。）而 π 介子有近三百倍於電子的質量。

四 電弱力的統一

改進 Yang-Mills 理論的一個重要工作是使場量子帶有質量。在這同時，實驗成果的累積使人們對强力和弱力的性質逐漸明瞭，知道同位旋和弱力有關連。結果一個改進的理論應該是和弱力有關的。六〇年代 Goldstone，Higgs 等人提出對稱破壞的機制使場量子帶有質量而不破壞規範對稱性。到了七〇年左右 Weinberg，Salam 分別地提出統一而未再歸一化的電弱理論。後來 't Hooft 補全了再歸一化的工作。當中性流、$W^\pm$，Z^0 粒子等實驗證實了W-S 理論的預測後，電弱力於是被發現是同一種力。（歷史可見 A. Salam 1979 年諾貝爾演講辭。）

Alan H. Guth 有一段文字提到當時人們的感受：

「1968～1971年我還是個粒子物理的研究生，那段時間有點像黑暗時代。我們唯一眞正了解的交互作用是電磁學—量子電動學——一個事實上二十年前就已發展完成的理論。我們有一個有缺陷的弱交互作用理論，而且等於根本沒有强交互作用的理論。有人提出夸克怎麼交互作用或是爲何我們看不到夸克，而且只有少數物理學家認眞的認爲夸克是眞實的粒子。至於重力的量子理論則被認爲沒有布望。

然後來了一段巨大的進展。Weinberg，Salam, Glashow 的工作成了一個可以接受的弱和電磁交互作用理論。夸克的交

互作用理論發展了出來並被稱爲量子色動力學，QCD ，而且成了可被接受的强交互作用模型。結合電磁、弱、强交互作用的理論被稱爲標準模型。……黑暗時代已經結束了。」規範理論的重要性眞可和相對論比美！

W-S 理論的成功有幾項重要的意義：

1.它顯示了弱力是一種規範場，近來物理學家認爲四種作用力本質上都是規範場，這是一種新的認識與發現。

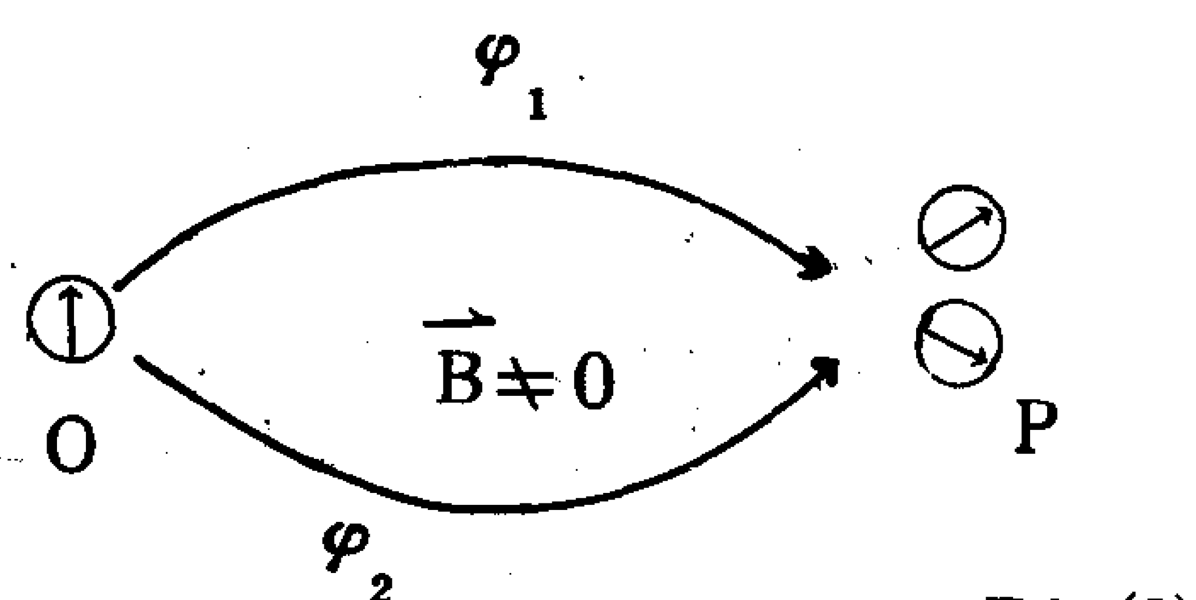
2.它顯示了愛因斯坦對「所有作用力應具共同本源」的預言是對的。這並不是一個很自明的預言，例如 Pauli 就曾引過一句話表達相反的信念：「What God hath put asunder no man shall ever join.」，神所分開的東西沒有人能再把它們合起來。

3.規範理論使我們找出正確的交互作用，可以幫助解決宇宙論的問題—這個世界是怎麼開始的，以及它的未來。（W-S 理論的細節見 F. Halzen, Quarks & Leptons, ch14.）

下面是關於場量子的簡表：

	電磁場	Yang-Mills 場	電弱場	强作用場（QCD）
規範群	U(1)	SU(2)	U(1)×SU(2)	SU(3)
場量子數	1	3	1＋3	8（膠子）
質量	無	無	有	無
"電荷"	無	有	有	有

表中場量子數即規範群的生成元數目。「電」荷指的是該場場源，例如QCD中的「電」荷是色荷。「電」荷和規範群是可交換群（不帶荷）或不可交換群（帶荷）有關，後者的場方程是非淺性的。

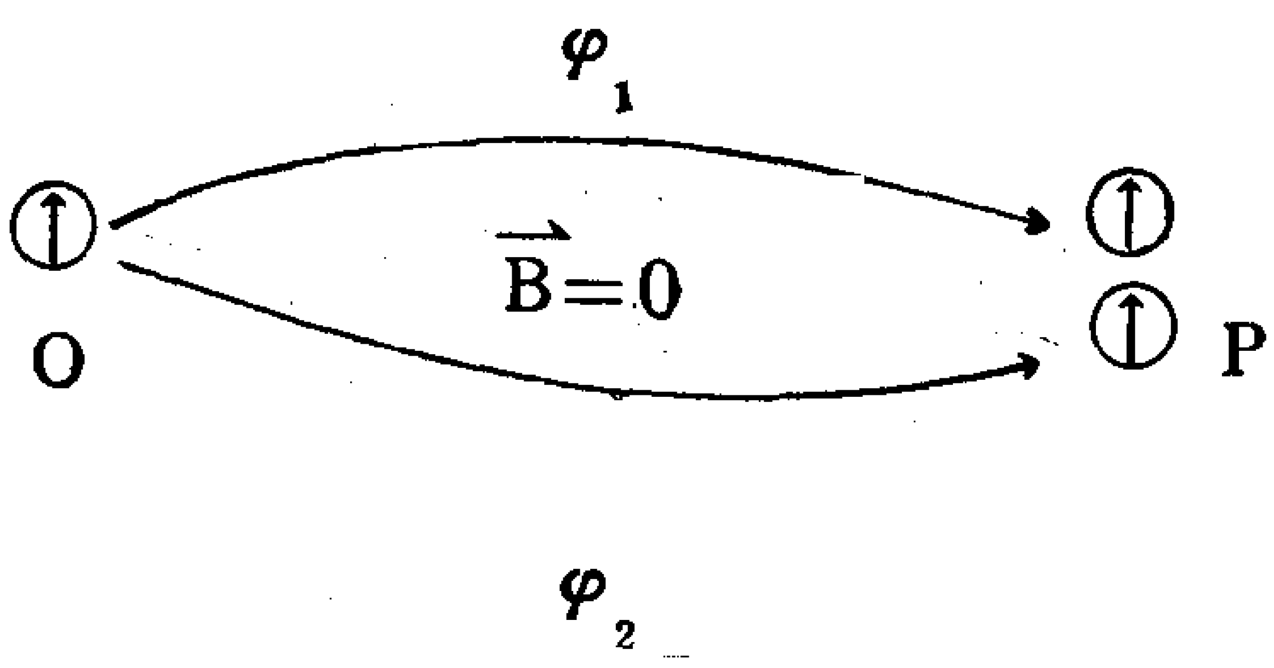


Fig(2)

五 Bohm-Aharonov 效應

除非空間中沒有磁場（$\nabla\times\vec{A}=\vec{0}$），否則(2)式中的積分

$\Omega(x)=\int_0^{c(\vec{x})}\vec{A}(\vec{x}')\cdot d\vec{c}'$ 和積分的路徑有關。這會造成相因子 $\exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\Omega\right)$ 的多值性，通常可以由適當的規範變換消除掉。另外一種情形是分別通過不同路徑的兩個波函數（如圖(2)），在P點會有相差而產生干涉。（Bohm-Aharonov effect）



P點的相差$\Delta\Omega=\int\vec{A}\cdot\vec{dc}$和被路徑圈住的磁通量有關。附帶一提的，如果是單一波函數，由0點出發繞行一圈回來也會有相差，這種多值性沒法以規範變換消除掉。（因爲0點和0點是同一點）由於$\exp(\frac{ie}{\hbar c}\Delta\Omega)$必須是單值的，所以必須

$\frac{ie}{\hbar c}\Delta\Omega=2\pi n$（n爲整數）。

也就是自然界中磁通量必須以量子化的形式存在。

在扭曲的空間中一個向量繞行一圈回來也會有方向改變的情形，因此我們可以想像磁場的存在使某種「內在的」空間受到扭曲。這個內在空間的根源是我們在時空中每一點都有某種自由度，例如圖(2)中儀錶代表的相位自由度。

在su(2)的Yaug-Mills理論中，也存在類似電磁　的Bohm-Aharonov效應，實驗可以這樣安排：（T.T.Wu,C.N. Yang phy Rev. D. Vol 12 P. 3845）。

由於重元素的中子數多於質子數，我成以重元素製成一根圓柱，這根圓柱的同位旋I_z因此不爲零。轉動柱體時在內部會產生「磁」場。如圖(2)沿柱體的兩束質子在P點的干涉會有移位現象，這個移位和中子束的移位反向。因此，射入時混合均勻的質子中子束在干涉板上會有質子中子比例起伏的現象。這個現象若存在則表示Yang-Mills場的確存在，如果沒觀查到則有兩種可能：①Yang-Mills場不存在。②有Yang-Mills場但場量子具有質量。（因爲有質量的場量子會破壞干涉現象。）到目前我還不知道結果如何。

六　幾何的觀點

規範理論和幾何學有密切的關連。文前曾提到Weyl把電磁位視爲微分幾何的連絡係數。雖然沒有成功，量子力學的正確詮釋也不過是把$S\mu\rightarrow\frac{ie}{\hbar e}A\mu$，還是可以解釋爲連絡係數，而$D\mu$就是微分幾何中的協變微分。被交互作用場扭曲的是某種（想像的）內在空間，這種空間的數學名稱叫做「纖細」。名稱的由來是因爲時空中每一點有一個獨立的內在空間就像布上每點都豎立一根纖維（現在的「布」是四維時空流型，纖維是每點的gauge。）纖維的全體（及「布」）叫做纖維束（Fiber bundle）。

內在空間扭曲的程度可以由黎曼曲率描述，它是協變微分的交換子〔$D\mu$, Dv〕。對電磁場而言，黎曼曲率〔$D\mu$, Dv〕$=-\frac{ie}{\hbar c}F_{\mu\nu}$（$F_{\mu\nu}=\partial\mu A_\nu-\partial_\nu A\mu$，即電磁張量）。黎曼曲率在規範變換下是不變的。微分、曲率等名詞是屬於微域幾何學的，通常這個層次的數學類比並不能提供比物理規範理論更多的訊息。幾何觀點眞正能提供物理洞見的層次是大域幾何，近來一些人正努力於開發纖維束的拓撲性質來預測規範理論的行爲。

下面是對照簡表（T. T. Wu. C.N. Yang Phy. Rev. D Vol 12 P3845, 1975）：

Gauge field terminology	Bundle terminology
Gauge type	principal fiber bundle
Gauge potential Y_μ	connection on a principal fiber bundle
Field strength $F_{\mu\nu}$	curvature
Electromagnetism	connection on a U(1) bundle
Isotopic spin gauge field	connection on a su(2) bundle
Dirac's monople quantization	classification of U(1) bundle according to lst chern class

最後一項和陳省身的理論有關，也就是前面所謂大域幾何的研究。可以看Y.C. Bruhat, Analysis, manifold and physics, P408。

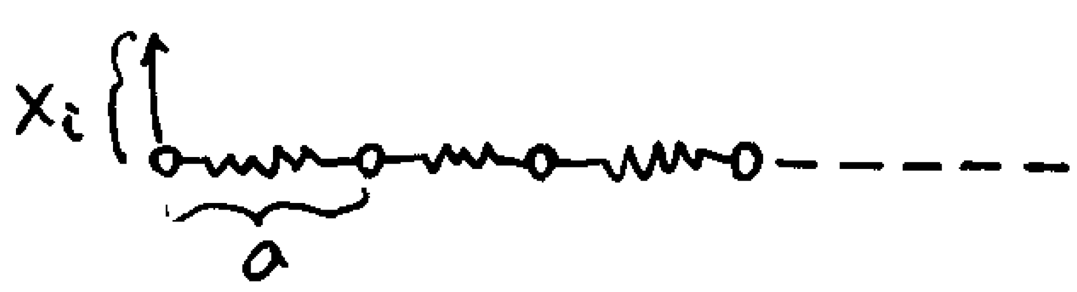
規範理論的說明常處於上下不得的情況，它「值得」讓許多人知道。但眞正使它顯出重要性的卻是層次較高的不可交換規範群。它不像重力理論可以有一些有趣的效應使之通俗化。無論如何，耐心看到這裏的讀者希望多少總有些收穫。

註(1)：相同的理論也曾被劍橋大學的研究生R. Shaw幾乎同時提出來。

(2)：當系統是連續的場時我們可以定義拉氏密度。例如：N 個諧振子串成的弦的拉氏函數爲：

$$L=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}_i^2-\frac{1}{2}k(x_i-x_i-1)^2\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{N}a\left[\frac{1}{2}\frac{m}{a}\dot{x}_i^2-\frac{1}{2}ka\left(\frac{x_i-x_i-1}{a}\right)^2\right]$$



當N→∞時（連續弦），

$$\sum a\to\int d\ell,\ \frac{m}{a}\to P,\ ka\to Y,$$

$$\frac{x_i-x_i-1}{a}\to\frac{\partial x}{\partial\ell}$$

$$L=\int\left[\frac{1}{2}\rho x^{-2}-\frac{1}{2}Y\left(\frac{\partial x}{\partial\ell}\right)^2\right]d\ell$$

方括號中的量就是拉氏密度$\mathcal{L}$，而 $L=\int\mathcal{L}\,d\ell$。

Ref:

1. B. Shutz, Geometrical methods of math. phy. 1982. ch6.
2. K. Moriyasu, An elementary primer for gauge theory, 1983.
3. F. Halzen & A.D. Martin, Quarks & Leptons, 1984. ch14.
4. C.N. Yang & R. Mills, 1954, Phys Rev. Vol 96. P.191.
5. T.T. Wu & C.N. Yang, 1975, Phys Rev. D12, P.3845.
6. L.N. Yang, Magnetic monoples, fiber bundles and gauge fields, in Five decades of weak interactions, 1977.