# 我所知道的 (X, P) Operator及Representation

[redacted]

[redacted]

林慶良　76級

若古典力學中 $p=m\frac{d}{dt}x$ 在量子論內 $<p>=m\frac{d}{dt}<x>$ 仍成立，可證明物理量與算符的對應：$x\to x$ 則 $p\to\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ 並且 $p\to p$ 則 $x\to i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$ 以及 $\psi(x,t)$ 與 $\Phi(p,t)$ 間滿足 Fourier Transformation

## 引言

物質具有質點與波動的雙重性質已是被接受的事實，企圖只用單一性解釋原子世界終究失敗；量子論不再單一考慮物質的單一性，而用一狀態函數 (State function) 來描述，在量子論內 $|\psi(x,t)|^2$ 表示欲在 $x-x+dx$ 於 t 時發現此質點的機率密度，並且假設

$$H\psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$$

(H 是 Hamiltonian)

和物理每一觀察量A (observable) 對應一算符 (Operator) A ，我們所能知道的期望值 $<A>$ 定定義爲

$$<A>\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,t)A\psi(x,t)dx$$

基於此如果能夠把最前式寫成微分方程的型式，所剩下的只是如何解此方程式了。本文所要做的工作是設古典力學內 $p=m\frac{d}{dt}x$，在量子論內 $<p>=m\frac{d}{dt}<x>$ 仍成立，而由數學演算證明 $x\to x\Rightarrow p\to\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ 及 $p\to p\Rightarrow x\to i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$，而在 x-space 內 $\psi(x,t)$ 與在 p-space 內 $\Phi(p,t)$ 之間滿足 Fourier Transformation，即

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,t)e^{\frac{ipx}{\hbar}}dp$$

$$\Phi(p,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,t)e^{-\frac{ipx}{\hbar}}dx$$

一、 $x\to x\Rightarrow p\to\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$

$$\because <x>\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,t)x\psi(x,t)dx \cdots\cdots(1)$$

$$<p>\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,t)p\psi(x,t)dx\cdots\cdots\cdots(2)$$

由 $<p>=m\frac{d}{dt}<x>$

$$=m\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,t)x\psi(x,t)dx$$

$$=m\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(x,t)x\psi(x,t)+\psi^*(x,t)x\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)\right]dx\cdots(3)$$

$H\equiv\frac{p^2}{2m}+V(x)$（設$V(x)$ real）代入(3)

得$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{i}{\hbar}[(\frac{p^2}{2m}+V(x))\psi^*(x,t)]x\psi(x,t)\right.$

$\left.-\frac{i}{\hbar}\psi^*(x,t)x(\frac{p^2}{m}+V(x))\psi(x,t)\right\}dx$

$=\frac{i}{2m\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}[\psi^*(x,t)p^2(x\psi(x,t)$

$-\psi^*(x,t)xp^2\psi(x,t)]dx$

$=\frac{i}{2m\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,t)[xp^2\psi(x,t)$

$+2(px)p(\psi(x,t))+(p^2x)\psi(x,t)$

$-xp^2(\psi(x,t)]dx$

$=\frac{i}{2m\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,t)[2(px)p(\psi(x,t))$

$+(p^2x)\psi(x,t)]dx$ ……………………(4)

由(4)=(2)　$\therefore 1=\frac{i}{\hbar}p(x)$ 及 $p^2(x)=0$………(5)

滿足上二關係，最簡單的取法是 $p\to\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$，代回

$H\psi=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi$即成爲

$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)+V(x)\psi(x,t)$

$=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$

此即　Schrödinger eq

但 $p=\frac{\hbar}{i}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x})$亦滿足此式，所以p之取法並非唯一，我們也可取 $p=\frac{\hbar}{i}(e^A-1)$ （$A\equiv\frac{\partial}{\partial x}$，$A^\circ=1$）然而取更高階對問題之解決只是徒增困難而已。

## 二、

設$H\Phi(p,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi(p,t)$仍然成立。

$<p>=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^*(p,t)p\Phi(p,t)dp$ ……(6)

$<P>=m\frac{d}{dt}<x>$

$=m\frac{d}{dt}(\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^*(p,t)x\Phi(p,t)dp)$

$=m\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{\partial}{\partial t}\Phi^*(p,t)x(\Phi(p,t))$

$+\Phi^*x\frac{\partial}{\partial \pi}(\Phi(p,t))]dp$

$=m\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{1}{-i\hbar}(\frac{p^2}{2m})\Phi^*(p,t)$

$x(\Phi(p,t))+\Phi^*(p,t)$

$x(\frac{1}{i\hbar}\frac{p^2}{m}\Phi(p,t))]dp$

$=\frac{i}{-2\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}[\Phi^*(p,t)x(p^2)$

$\Phi(p,t)]dp$ ……………………(7)

由(7)=(6)　$\therefore p=-\frac{i}{2\hbar}g(p^2)$

選擇 $x=i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$，如同(一)中x之取定也非唯一

## 三、

在(一)(二)內設

$H\psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$

$\to$ x-representation

$H\Phi(p,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$

$\to$ p-representation

於此討論$\psi(x,t)$與$\Phi(p,t)$之關係。

以$x\to x$　$p\to\frac{\hbar}{i}(e^A-1)$爲例：

$H\psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$改寫成

$-\frac{1}{2m}(\hbar^2)(e^A-1)(e^A-1)\psi(x,t)$

$+V(x)\psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$

設$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,t)e^{\frac{ipx}{\hbar}}dp$

則$-\frac{\hbar^2}{2m}(e^{2A}-2e^A-1)\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,t)e^{\frac{ipx}{\hbar}}dp$

$+V(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,t)e^{\frac{ipx}{\hbar}}dp$

$$= i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,t)e^{\frac{ipx}{\hbar}}dp\right] \quad \cdots\cdots(8)$$

設 $V(x)=\sum_{n=0}\frac{V^{(n)}(0)}{n!}x^n$，一個 Lemma：

$$e^A\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,t)e^{\frac{ipx}{\hbar}}dp$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,t)e^A(e^{\frac{ipx}{\hbar}})dp$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}(e^{\frac{ipx}{\hbar}})dp \quad A^n\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,t)\left(\frac{ip}{\hbar}\right)^n e^{i\frac{px}{\hbar}}dp$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,t)\Sigma\left(\frac{ip}{\hbar}\right)^n\frac{1}{n!}e^{\frac{ipx}{\hbar}}dp$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,t)(e^{\frac{ip}{\hbar}})e^{\frac{ipx}{\hbar}}dp$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,t)e^{\frac{ip}{\hbar}(1+x)}dp$$

故 $e^{2A}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,t)e^{\frac{ipx}{\hbar}}dp$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,t)e^{\frac{ip}{\hbar}(2+x)}dp$$

又 $x^n\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,t)e^{\frac{ipx}{\hbar}}dp$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,t)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\right)^n(e^{\frac{ipx}{\hbar}})dp$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\hbar}{i}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^n(\Phi(p,t))e^{\frac{ipx}{\hbar}}dp$$

作 n 次部份積分

(8)式改寫爲：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,t)e^{\frac{ip}{\hbar}(2+x)}dp\right.$$

$$-2\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,t)e^{\frac{ip}{\hbar}(1+x)}dp$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,t)e^{i\frac{px}{\hbar}}dp\right]$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{V^{(n)}(0)}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\hbar}{i}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^n\Phi(p,t)e^{\frac{ipx}{\hbar}}dp$$

$$=i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,t)e^{\frac{ipx}{\hbar}}dp$$

$$故 -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\Phi(p,t)(e^{\frac{2ip}{\hbar}}-2e^{\frac{ip}{\hbar}}-1)\right]$$

$$+V\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\right)\Phi(p,t)$$

$$=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi(p,t)-\frac{\hbar^2}{2m}(e^{\frac{ip}{\hbar}}-1)^2\Phi(p,t)$$

$$+V\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\right)\Phi(p,t)$$

$$=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi(p,t) \quad\cdots\cdots(9)$$

此式已不是 p-representation 之 Schrodinger（如果取 $p\to p$，$x\to i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$），除非Hamiltonian 之動能型式改爲 $-\frac{[\hbar(e^{\frac{ip}{\hbar}}-1)]^2}{2m}$，此時 $H\psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$ 與 $H\Phi(p,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi$，而 $\psi(x,t)$ 與 $\Phi(p,t)$ 才滿足 Fourier Transformation pair relation 但是如果 $x\to x$，$p\to\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$（不用 $\frac{\hbar}{i}(e^A-1)$），(9)式變爲

$$\frac{p^2}{2m}\Phi(p,t)+V\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\right)\Phi(p,t)$$

$$=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi(p,t)$$

此即 p-representation 之 Schrodrngere 因爲

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,t)e^{\frac{ipx}{\hbar}}dp \quad\cdots\cdots(10)$$

以 $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-ip'x}{\hbar}}$ 乘(10)式兩邊

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,t)e^{\frac{-ip'x}{\hbar}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,t)\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{i}{\hbar}(p-p')x}dxdp$$

$$=\frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,t)\delta\left(\frac{p-p'}{\hbar}\right)dp=\Phi(p',t)$$

所以 $H\psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$

$$H\Phi(p,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi(p,t)$$

加上 Complementary Principle P-operator之微分型式便不可任意取了。