我對古典物理與量子物理的看法

郝賀同76級

分析一個古典粒子“動量場”中波前的運動，可決定其相速度，頻率，波長，並“導出”薛丁格方程式及說明不確定原理。

(一)前　言：

當我剛開始由古典物理進入量子物理時，總是把量子物理看成一些遷就於實驗結果的硬性式子，稍後看過Goldstein 的古典力學，第九章由Hamilton-Jacobian 方程式導出薛丁格方程式後，才開始體會到量子力學的深厚古典性。其後，亦曾參考了 Feymann及Hibbs 作的 "Quantum Mechenics and Path Integrals"以及Synge 作的"Geometrical Mechanics and De Broglie Waves" ，更覺得量子學並不像我想像中那麼不容易接受，（例如波粒雙重的或然率性，以及測不準原理等）最近自己私下分析了幾個古典力學中比較重要的原理，並由幾何光學中引入對照，再加上一些半古典的解釋，亦引出了薛丁格方程式，並隱隱襯托著海森堡測不準原理，故在此記下，希望其間圖像的清晰，想法的新穎，或許能提起各位一點興趣。

(二)動量場：

由於牛頓運動方程式對時間微分兩次，故一組完全牛頓運動方程式解的確定，是非要有６ｎ個起始條件來限制不可，但是在量子論中，我們知道，互補座標(Conjugate Variables) ，是不能同時得到的，故牛頓的運動方程式，按我們現在的眼光看來，對於我們目前的問題，可能沒有什麼太大的幫助，因此我不打算由牛頓方程式出發，但是由牛頓方程式所衍生的拉格朗日原理，却一點也沒有和量子條件衝突，故它可能是我們進門的鑰匙。

$$\delta\int_{P_1}^{P_2} L(p,x,t)\,ds = 0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)式$$

拉格朗日原理說：

它是一個積分形式，爲了要適當的應用這個式子，我們應該要找出一個對應的積分場，我把它叫做“動量場”。

當我們看到大氣層的流動，我們可以把它想像成氣壓等壓面的振動，但也可以想像成大氣分子不規則的逃竄，至於光的本質，我們可以把它看成等相位之光波波前的挪動，但也可以把它看成一群“不可數”(uncountable) 且“無窮”(infinite) 數目的光子，故一個在古典力場中運動的古典粒子，我也從另外的一個角度，把它看成一些動量場中地位相同的面，在古典力學定律的束縛下，所引起的總體效果，至於一個面，甚至一個空間 3-dim ，能和一個點（質點）對應相等的觀念，依古典的講法是絕對說不過去的，但是假如我們能接受如此的觀念：一個古典粒子也是不能夠同時進行動量和位置絕對精確的測量，那麼一個動量大小，方向完全精確的粒子，我們也就沒有必要強調它的瞬時位置了；這是本文中唯一要求各位放棄的古典觀念，因爲不論是否由於儀器的不完備，或實驗技術的不高明，亦或自然界的基本原理，這個觀念（海森堡測

不準原理）是完全由實驗支持的，讓我們先考慮一個質點動量完全準確的情形（即波動力學中所謂的單色波）在 3-dim 空間位能場中運動，設法定義動量場，然後導出薛丁格方程式，接著再考慮質點動量不完全準確的情形，（即波動力學中所謂的波束）襯出海森堡測不準原理，這是以後數節發展的過程。

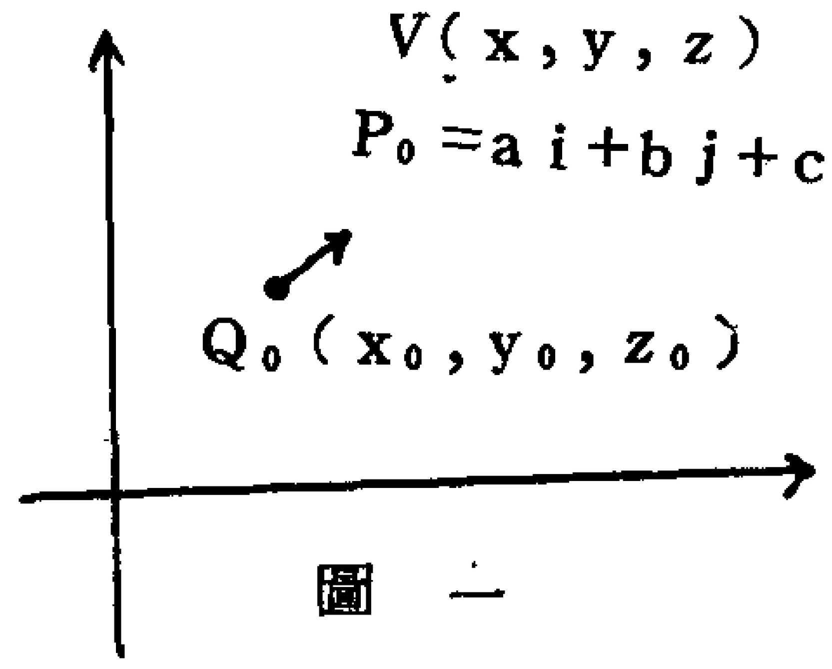

圖 一

見（圖一），若一質點，質量為m，能量為E，在位能場$V(x,y,z)$中運動，它的行動位置，我們可以根本不加以理會，而僅假定，當此質點若很偶然的通過空間的某一點$Q_0(x_0,y_0,z_0)$，則此時此質點必擁有一個絕對準確的動量$P_0=ai+bj+ck$，那麼定義此單質點系統的動量場$W(x,y,z)$為：

$$|\vec{\nabla} W| = \sqrt{2m(E-V)} = |\vec{P}|$$

綜合上述以數學形式表之：

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 = 2m(E-V)$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{P_0} = a$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial y}\right|_{P_0} = b$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial z}\right|_{P_0} = c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

但上述的式子並不足以確定$W(x,y,z)$的函數形式因為一個偏微分方程式（如(2)式）的解的邊界條件必須限制在空間的一個面上，因此，我們還需要找出一個面來限制$W(x.y.z)$才行。

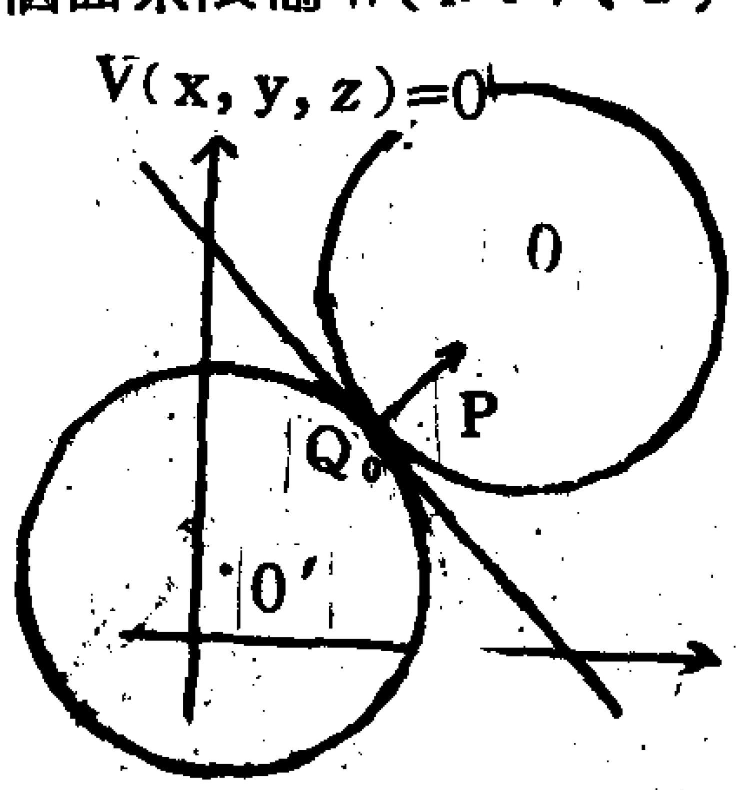

圖 二

今考慮自由空間$V(x,y,z)=0$的情形，（見圖二），若任意滿足(2)式關係式的解，$W(x,y,z)$，的等值面，為通過Q_0點的平面、球面、或球柱面時，都可能當作我們的動量場，今假定空間各點的動量方向均朝著∇W的方向，（此假定是在強調此單質點系統的動量為絕對已知），那麼有些動量場便會在空間中造成奇點，使此單質點在這些奇點（如圖二之0與0'點）上，消失或產生，而不適合我們單質點系統在自由空間運動的情形，故唯有以通過Q_0點的平面為等值面的$W(x,y,z)$才能具有物理意義，因此自由空間中單質點系統的動量場，便能唯一的決定了。

引用上面的結果，當$V(x,y,z)$不為零（或常數）時，我們假定$V(\infty)=0$，而在無窮遠處找一個任意垂直於$ai+bj+ck$方向的平面，令(2)式=，中的解$W(x,y,z)$在此曲面上具有相同的值，那麼(2)式的偏微分方程便具有唯一確定的解了：

$$\nabla W(x,y,z) = \vec{P}(x,y,z) \quad \cdots\cdots(3)\text{式}$$

(三)動量場位面：

所有$W(x,y,z)$=常數的面，我們稱之為動量場位面，這節中，我們把拉格朗日原理應用於其上，而看出這些場位面，俱可看成某一波場的波前的性質。

上節中，我們可能不再會注意Q_0點特殊的地位了，我們應該想像成：對應於一個精確已知的動量（$\vec{P}$），只能夠決定一個動量場，至於此單質點的位置，只不過是一個完全不必要的未知，故我們對於整個空間而言僅僅觀察到一些等位面，這些面的地位和大氣中的等壓面和光波中的等相面是完全類似的。相當時間改變時，這些面會如何的變動呢

(1)式中的拉格朗日原理，可以下式表之：

$$\delta\left[\int_{P_1}^{P_2} p\cdot dx + \int_{t_1}^{t_2} E\cdot dt\right] = 0 \quad \cdots\cdots(4)\text{式}$$

上式中的P_1,P_2,t_1,t_2，表可變積分路徑端點的位置與時間，由(3)式知：

$$\int_{P_1}^{P_3} p\cdot dx = W(x,y,z)\Big|_{P_1}^{P_2}$$

又E是不隨時間變動的常數，所以：

$$\int_{t_1}^{t_2} E\cdot dt = Et\Big|_{t_1}^{t_2}$$

因此，(4)式變成：

$$W-Et = f(x,y,z) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)\text{式}$$

上式中，$f(x, y, z)$ 爲任意 x, y, z 的連續函數，而 $f(x, y, z)$ 在路徑端點上的值必爲零（參考 Variational methods of path integral），因此我們可以令其中的一個端點在系統空間中連續變動，那麼 $f(x, y, z) \equiv 0$，所以(5)式便成爲：

$$W - Et = 0 \quad \cdots\cdots(6)式$$

這就是上節中的動量場隨時間變動的方式，故當 $t = t_0$ 時的某一個動量場位面 S：

$S(t_0)$：$W(x, y, z) = C_0$，當時間連續的變成 t_1 時，S 面也會連續的推進變成：

$S(t_1)$：$W(x, y, z) = C_1$，而 C_0 與 C_1 滿足以下的關係：$C_1 - C_0 = (t_1 - t_0) \cdot E$

因此我們的單質點系統空間，便開始有波動的影子了。

(四)動量場位面移動的相速度：

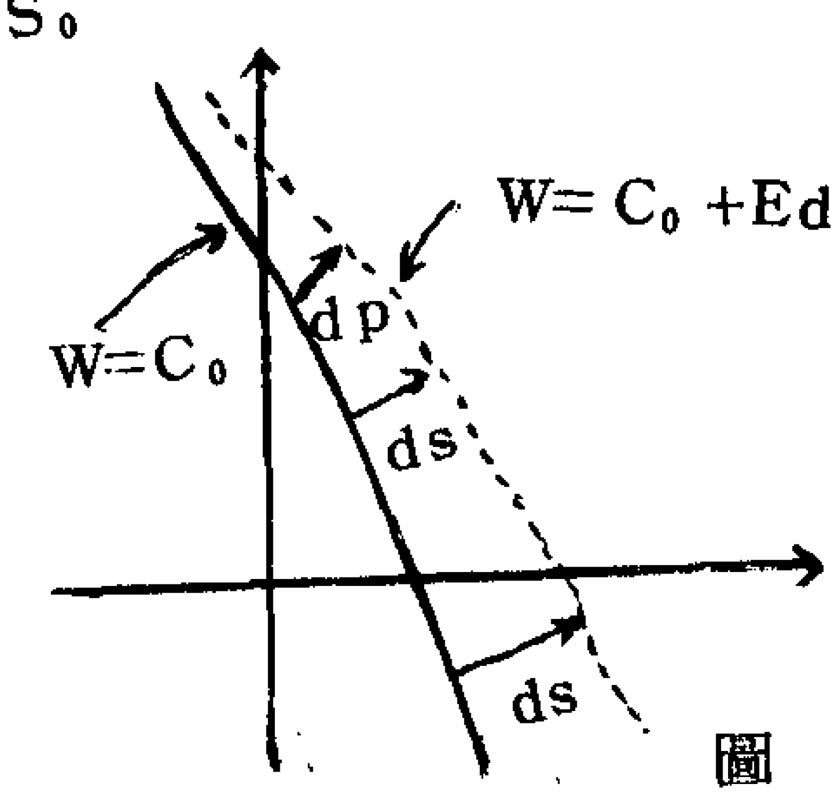

圖 三

上節中，我們是考慮單色波的情形（因爲僅有一個動量場），所以這些隨時間而動的動量場位面，必擁有一個相速度，我們很容易找出來。

見（圖三），當 $t = t_0$ 時有一個場位面 S_0：$W = C_0$，當時間變動 dt，則 S_0 則會變成：

$$W = C_0 + Edt$$

但因爲 S_0 曲面上的每點，可能有不同的位能，故 S_0 在 $t = t_0$ 時，曲面上每點的瞬時速度不見得相同（如圖），設 dt 的時間間隔內，各點沿垂直 S_0 曲面上的方向移動 ds（爲位置的函數），那麼相速速度 V_P：

$$V_P = \frac{ds}{dt}$$

由(3)式知：$dW = |\nabla W| \cdot ds = |\vec{P}|\, ds$

由(6)式知：$dW = E\, dt$

因此 $$U_P = \frac{E}{|\vec{P}|} = \frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}} \quad \cdots\cdots(7)式$$

但是我們要注意 U_P 是不具有測量意義的因爲由相對論能量：$E \approx mc^2$

因此 $$V_P \approx \frac{c^2}{U_\phi}$$

上式中 V_ϕ 表古典粒子可測量速度，（也就是群速度，但要在波束的情況下才能表現出來，見第六節），$\therefore U_\phi < C \Rightarrow U_P > C$，這是不可能的，但 U_P 和 U_ϕ 成反比的關係是顯而易見的，這正如光波在介質中所說現的情形一樣。

現在，我們已經約略的看出古典粒子的波動圖像，但這仍然是在古典物理的範疇，因爲我們僅能探究某波場的形式波前，而無法窺知定義於這些波前上的波場到底是什麼，由量子論中，我們可能定義它是或然率場而計較於這個場的重疊與干涉，但這已超出古典所能接受的範圍了。

(五)戴布洛意關係式與薛丁格方程式：

上節中，我們已找出了某形式波場的相速度，現在來找此波場所對應的頻率與波長。

今假定這些移動的動量場位面，有對應的形式波長 λ，形式頻率 U，形式波向量 k，以及形式角頻率 ω，（這裏我用"形式"兩字是表示這些波性如 ω, U, λ, k 等必非起源一已知波源的延滯，而可具有可量的特性；它們僅不過是一種想像中和古典的對應罷了），則此波場的形式波前（動量場位面）亦可以下式表之。（即等形式相位所形成的面）：

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = a \text{（常數）} \quad \cdots\cdots(8)式$$

上式中 k，x 僅爲位置的函數，故

$\frac{1}{2\pi}(\vec{k} \cdot \vec{x} - a)$ 亦是一個位置 (x, y, z) 的函數，令它可表示成 $G(x, y, z)$ 的函數形式，那麼(8)式便成：

$$G - Ut = 0 \quad \cdots\cdots(9)式$$

今比較(6)式與(9)式，我們的結論是：在與時間有關的部份，U 與 E 必成某種線性關係（當然 W 與 G 也一樣），令其間的比例常數爲 h，則：

$$E = hU \quad \cdots\cdots(10)式$$

又 U_P 爲已知，所以：

$$\lambda = \frac{U_P}{U} = \frac{h}{|\vec{P}|} = \frac{h}{\sqrt{2m(E-V)}} \quad \cdots\cdots式$$

(10)，(11)兩式，便是我們通常所謂的戴布洛意關係式，其中 h 是爲普朗克常數，由於它的值很小，故一直隱瞞著世人，直到第二十世紀才肯露面，也正因爲此，才使得世人無法察覺物覺的波粒兩重性，而

摒棄之於古典之外，（同學們若不滿意本節的導引法，請參照Goldstein 古典力學第九章尾，由幾何光學來對照著的解釋）。

當我們知道一個形式波場的頻率與波長，那麼這個形式波動方程式，便應該很容易找出來才是，今不多寫，請同學參考Messiah 的量子力學，但有兩點必須注意：①力學的波動方程式，由實驗顯示，其滿足重疊原理，故我們的方程式必爲線性方程式。②力學的結果，對應於每一個時間，僅能對應於一個單值，因此這個方程式對時間的微分而言是一次的，這和一般的波動（對應於±兩方向）不同，故如此的微分方程式的係數便不再是實數了，但虛係數的微分方程式，假如沒有量度的意義，並不會引起什麼衝突，因此我們便會有如下的波動方程式（薛丁格方程式）：

$$-\frac{h^2}{2m}\nabla^2\psi+V\psi=ih\frac{\partial}{\partial t}\psi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots⑿式$$

上式中，ψ表定義在以動量等位面爲形式波前上的波場，它的物理意義需取$|\psi|^2$後，才可表示出來，但這也不在古典的門內，古典的定理僅告訴我們有如水波波前地位的動量場位面並告訴我們適合此波前的波動方程式是什麼而已，本節本來可用更古典的語言（幾何光學，見Goldstein 第九章）來敘述，但篇幅太長，故僅以半古典的方式說出。

㈥海森堡測不準原理：

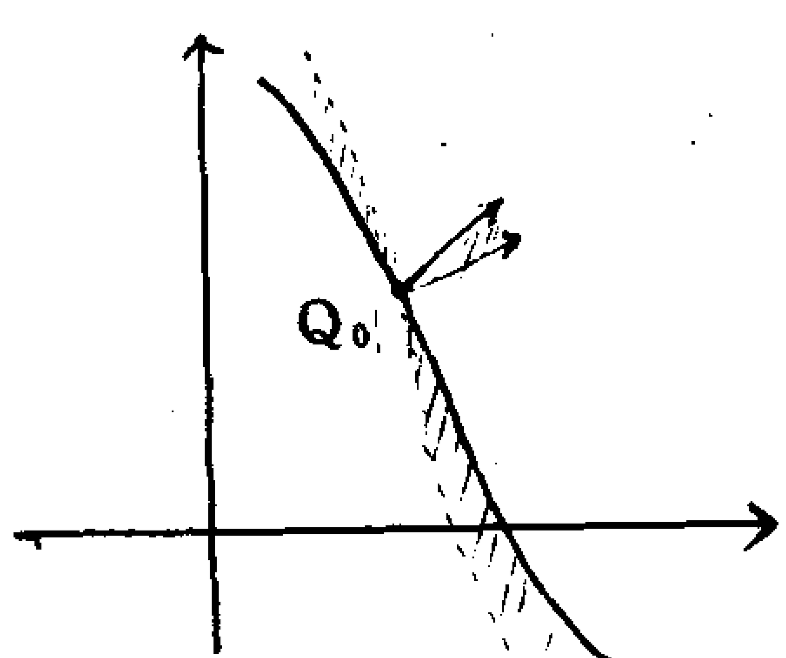

圖 四

現在我們再回到第二節的問題上，假如我們在Q_0點上所予的動量並非完全的準確，而是一個連續變動的不準，那麼通過Q_0點的動量等面面，便成（圖四）的帶狀曲面，根據⑿式的重疊原理，它們會像水波的干涉一樣（但却是頻率連續的重疊），僅在Q_0點附近產生一個波束，因此Q_0點便有量度這個質點的物理意義了，但波束也僅代表著區域性的不準，因此我們就有理由相信，$\triangle\overrightarrow{P}$與$\triangle\overrightarrow{X}$可能會有某些關聯，這就是海森堡測不準原理，且此時的波束也不再以相速度移動，它移動的速度便是我們古典物理中量度的速度（群速度）。

本節爲了說明方便起見，以 1-dim 代替 3-dim 的情形，而上節所述的形式波場的波前，不再是面而是點了，本節的計算僅略略提過，但本節的重點仍然僅著重於古典的外觀。

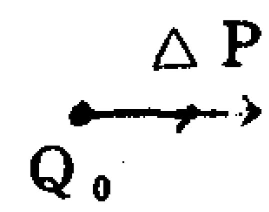

圖 五

古典物理是吾因果性的 (Causality)，見（圖五），若Q_0具有動量的不準$\triangle P$，則必是由於能量的不準$\triangle E$所致，故在Q_0點所形悉的波束，可以下式表之：

$$\int_{\Delta P} A(P)^{\frac{i}{\hbar}(Px-Et)}\,dp \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⒀式$$

而$E=C\sqrt{p^2+m^2+c^2}$，（相對論能量）

或$E=\frac{p^2}{2m}$ （非相對論能量）

故⒀式在Q_0點的群速度V_ϕ 爲：

$$U_\phi\Big|_{Q_0}=\frac{dE}{dP}\Big|_{Q_0}=U\Big|_{Q_0}$$

故其不論在相對論或非相對論情況，V_ϕ 都表示古典質點在Q_0點的古典量度速度，而⒀式的積分形式是富氏積分，此種積分有一種很重要的特性，那就是：

$$\triangle P\cdot\triangle X\approx h \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⒁式$$

這就是（約略的）海森堡測不準原理，就此簡單提過。

㈦後 記

本文的重點，主要是在㈡,㈢,㈣三節，至於後面三節，僅是前三節的推廣，它不過是想把古典的場觀，完全建立全以波前形式出現的動量場上，並期望它能和早期的量子力學對應，故我們可以宣稱：古典物理就是在研究某波場外觀（波前所形成的波束）的物理，而量子物理却是在直接探討這些波場的具體意義，而由於h（普朗克屆數）的值很小，才讓我們忽略了古典粒子是一個波束（非點）的性質，又此波場和其外型的對應，可能便在量子論中的那些算子(operator) 上吧！