質點在平方反比力場中受均勻固定力擾動時之運動

侯立成75級

本文討論平方反比力場受均勻固定力擾動時，對質點運動的影響。處理包括定量分析其運動與運動量，定性解釋，軌道的求解，對應於量子力學中的情況與一點應用。

這是American Journal of Physics 42 (361) 1974上提出的一個Mini-Research Problem，即當平方反比力場中另加一均勻固定之微弱力時對質點運動之影響爲何？這個問題之值得作討論主要在於它有一些奇妙的運動特性，而幾乎所有的力學教科書都沒有注意過（所以才構成一個迷你研究問題），初次碰上這問題的人，大概也難完全正確地講出運動之某些特性。而且它可以作許多層次的討論，事實上所用到的物理不會超過三、四年級正常的程度。

問題是這樣的：令外加力在x方向，且平方反比力的力中心固定於原點，則運動方程式在GM＝1的尺度下爲

$$\begin{cases} x = -\dfrac{x}{r^3} + k \\ y = -\dfrac{y}{r^3} \end{cases}$$

並且我取一個起始條件，使k＝0時（即尙無外加力時），質點能作圓運動，即t＝0時x＝1，y＝0，$\dot{x}$＝0，y＝1（此條件容易驗證）

式子看來簡單，却沒有簡單的解，也不易預測其運動特性。Approach 這個問題，可以有幾個層次：

下面的討論分五大部份：

一、用數值分析的方法，藉計算機的幫忙，來「觀察」它的運動與運動量。

二、對一之結果給予簡單之物理解釋。

三、我證明這個運動的closed-form solution　是存在的。

四、討論原子物理中的 Stark effect 在古典極限下與這個運動的對應。

五、這個問題在眞實世界中的角色。

一、

第一步乃是希望能觀察此運動，最簡單的方法是用計算機來模擬此情況，「計算」其軌跡與運動量時間之變化。

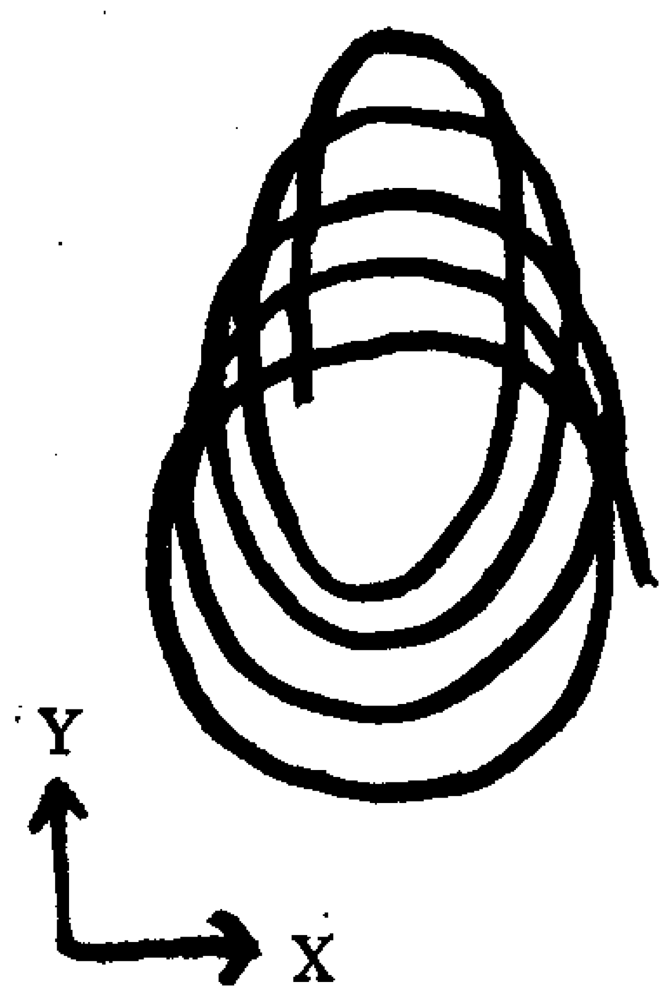
用的是fouth-order Runge-Kutta method with Kutta coefficients（簡單的Euler method誤差太大了）

程式不難（但主要部份是同學寫的），但由於若干近似方法中無可避免之誤差，結果不很理想，關於程式與可能誤差的討論此處略去。把結果略加「修正」後如下：

(一)軌跡——我試過三種數值之 k

k ＝ 0.03時，仍大致保持圓形，變化之特性不顯著。

k ＝ 0.1時（僅相當於原來重力之 10％），圓運動被破壞，且逐漸拉長成橢圓，但它並不是在 x 方向拉長，而是在 y 方向！與力成九十度角。（如圖，此圖有點強調了此趨勢）



k ＝ 0.2時，破壞太大，已有些變形。

如果把計算的時間加長，最後發現它竟然是bounded motion ！仍會回到起始點重新開始。（由於計算機之時間寶貴，我只試過 k ＝ 0.03之情形，所以無法看清其整個變化經過）。

又，軌跡與開始時質點之位置沒有關係。

(二)能量（動能加重力位能）——

在－0.5至－0.6左右起伏，但大致上仍可認為是常數。

(三)角動量

每一單獨一圈中數值略有起伏，但一圈圈橢圓逐漸變長時，起伏之平均值漸下降，這一部份只試過小段時間，不敢推測以後之變化。

二、

為了解釋這些現象，考慮外加力（固定於 x 方向）在半徑方向的分量：$f_r = k\cos\theta$，θ 即為質點之方位角，在（1，0）點 $f_r = k$，逐漸減小至（0，1）點為 0，至（－1，0）點 $f_r = -k$，然後變化回 0，＋k，即此徑向力隨時間有一振盪現象，且頻率恰與質點圓運動時相同。

又此時以 r 為變數的Lagrange eq為

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{1}{r^2} = f_r \quad , \quad L \text{為角動量}$$

由於起始條件（圓運動）的選擇及平方反比力之特性（在有效位能極小值附近之振盪頻率與極小值時之圓運動頻率相同，易證）。故上式可視為一驅使振盪之方程式，驅使頻率（f_r 之頻率）與 $f_r = 0$ 時之「自然頻率」相同，即有共振，但共振時運動會比驅使力落後 $\frac{1}{4}$ 週期，所以拉長的橢圓與力方向垂直。

這只是一個簡單的解釋，並不是眞正的強迫振盪問題，否則能量將因共振而增加，注意我在最先已假設了力中心固定，固定需「施力」以抵消 k 對力中心及質點整體之影響，計算質點能量時這二項都未算入。

三、

下面用一些數學，我將證明（至少原則上）該運動封閉型式的解是存在的。

質點的漢米爾頓是

$$H = \frac{1}{2}\left(P_r^2 + P_\phi^2\right) + \frac{1}{r} + kz$$

由於現在空間有了一個特殊方向，定為 z 軸，所以用拋物線座標來處理較為方便，其與笛氏座標之關係為

$$x = \varepsilon\eta\cos\phi$$

$$y = \varepsilon\eta\sin\phi$$

$$z = \frac{1}{2}\left(\eta^2 - \varepsilon^2\right)$$

故 Hamilton-Jacobi eq' 在此座標中為

$$\frac{1}{\varepsilon^2+\eta^2}\left(\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right)^2+\frac{1}{\varepsilon^2+\eta^2}\left(\frac{\partial W_\eta}{\partial \eta}\right)^2+\frac{\alpha_\phi{}^2}{\varepsilon^2\eta^2}+\frac{1}{\varepsilon^2+\eta^2}+\frac{k}{2}(\eta^2-\varepsilon^2)+E=0$$

上式中E爲能量

整理後，恰可以分離變數

$$\left(\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right)^2+\frac{\alpha_\phi{}^2}{\varepsilon^2}-\frac{k}{2}\varepsilon^4+E\varepsilon^2+P=0$$

$$\left(\frac{\partial W_\eta}{\partial \eta}\right)^2+\frac{\alpha_\phi{}^2}{\eta^2}+\frac{k}{2}\eta^4+E\eta^2+Q=0$$

P，Q代表兩個常數，兩式的型式相似，故Hamilton's Characteristic function 可解爲$W=W_\varepsilon+W_\eta+W_\phi$，其中

$$W_\varepsilon=\int\sqrt{A\varepsilon^4+B\varepsilon^2+C+\frac{D}{\varepsilon^2}}\,d\varepsilon=\int\frac{\sqrt{Au^3+Bu^2+(u+1)}}{u}\,du$$

這已是一個橢圓積分之型，可用橢圓函數表示，詳細步驟可見Whittaker and Watson的 Mordern Analysis, P.512。所得超越函數並沒什麼奇怪，只是不常見而已。W得到後，如同一般Hamilton-Jacobi Theory中的解題步驟，積分作轉換等，便可以解出軌道方程式。我當然還沒有閒到要把它們全部算出來。

四、

這個問題在量子力學中（即微觀世界裡的平方反比力）的對應如何呢？譬如說把氣體放在二平板電容器間，加上電場……——這正是原子物理中的Stark effect！此效應早已爲人所知，Bethe and Salpeter的那本 Quantum Mechanics of one and two electron atoms 中把這個問題用量力討論得讓人無法插嘴（各種強度的電場都處理了）。下面我只以對稱件的考慮指出它與古典常觀情況下運動的有趣對應。

氫原子n＝1的各狀態（均爲簡併）之或然率分佈，$|1S>$是球對稱，$|1P_x>$、$|1P_y>$、$|1P_z>$的對稱軸分別在各軸上。故

$$|1P^+>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|1P_x>+i|1P_y>)$$

的或然率分佈可成爲位於x－y平面上之圓環形（這些分佈在許多初級量力書上皆可找到實際的圖與函數型式），對應於古典之圓軌道、

現在多了一個 Perturbation Potential $\Phi=Ex$很容易可以證明如果二狀態之宇稱性不同，則Φ在此二狀態間之 transition matrix element 將爲0。

目前情況，僅P與S之角動量一奇一偶，宇稱性不同，故P_x或P_y至S之轉換才可存在，若P_x轉換成S時，原來的或然率分佈少了x軸上的分佈，而集中在y軸上，相當於古典情況下，質點軌道成了一個拉長的橢圓。隨後其它可能的轉換也分別有些對應。

事實上究竟依次作何轉換，以及轉換之週期都可用Perturbation Method計算出來。

五、

本來這個問題到此大致已有了一個交待，不過，想想平方反比力在我們常觀世界中之普遍性，它不會完完全全與現實無關。在眞實世界中它確曾被觀察過，那就是人造衛星受太陽風襲擊（一種固定微弱的力量）時軌道的變化。太陽風是太陽因熱與重力效應不平衡而射出之一些離子化氣體，速度每秒達數百公里，地球等行星因有磁場之「保護」，所以並未直接受到影響。

我在一本美國太空總署的叢書中(The Physics of Space)看到一段記錄，它描述一顆早期的衛星Echo I（1960年）的遭遇，發射前科學家們雖考慮了若干偏差的因素，預估了軌道，但沒想到太陽風却使其產生了出乎意料之外的運動，所以這個小問題也不完全是紙上談兵性的……

不過，我的討論也不算完全，譬如角動量的變化就未論及（想想現在有了外力，且運動爲封閉，角動量應該有規則地變化），其它可能的起始條件（如橢圓）情況也未考慮。本文只是當作課外的餘興而已，或許仍有些錯誤有待討論。