# The Concept of Limit Superior and Log Test

■ 李東海 ■ ? ■ > ■ = ■ < ■ 77級

本文先說明符號及名詞的意義，並證明了若干性質然後提出兩種方法來定義 limit superior 及 limit inferior ，並證明兩個定義全等。最後應用到數列斂散性之 log test 上。

現在我想和各位談一談極限觀念中一個引人入勝的問題：limit superior 和 limit inferior

(i) 符號說明：

① lim*

我們在 IR* 中來定義 limit:

如果 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散至無窮大，我們定義

$\lim{}^* a_n = +\infty$

如果數列發散至負無窮大，我們定義

$\lim{}^* a_n = -\infty$

如果 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂，我們定義 $\lim{}^* a_n = a_n$

② Sup*, inf*,

$A \subset IR^*$

如果 A 無上界， $\sup{}^* A \equiv +\infty$

A 無下界， $\mathrm{Iuf}{}^* A \equiv -\infty$

如果 A 有界，我們定義

$\mathrm{Sup}{}^* A \equiv \sup A$

$\mathrm{Inf}{}^* A \equiv \inf A$

(ii) 名詞說明：

① F 是一個數列所成的 Collection

則如果 F 中的數列都是收斂的，而且

$\forall \in > 0 \quad \exists N > 0$ s.t. $n > N$

$|a_n - L_a| < \in$ for $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in F$

則我們稱 F 中的數列是均勻收斂的

②如果 F 是一個 Collection 均勻收斂數列，而 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散至 $\infty$ (或 $-\infty$) 則我們定義

$F' = F \cup \{\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\}$ 也是一個 Collection of 均勻收斂之數列如果 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是發散至正負無窮大則我們定義 $\{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\}$ 是均勻收斂。

(iii) 性質說明:

①如果 F 是一個 Collection of Convergent sequence 則我們一定可以造成另外一個 Collection F″，而其中的數列都是 F 中某一數列之子數列，且 F″ 中的數列是均勻收斂。

並且 F 中(數列集合)的聯集 = F″ 中(數列集合)之聯集(註 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個數列，則 $\{a_n\}$ 是 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 之數列集合。)

我們可以把 F 中每一個數列作如下手續之分化：

設 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in F$，且其極限是 L，

則屬於 $(L_1+\frac{1}{2}, L_1+\infty]$ 或 $(L_1-\infty, L_1-\frac{1}{2}]$

間 $\{a_n\}$ 中之點是可數，

屬於 $[L_1+\frac{1}{3}, L_1+\frac{1}{2})$ 或 $(L_1-\frac{1}{2}, L_1-\frac{1}{3}]$

間 $\{a_n\}$ 中之點是可數，

$\vdots$

屬於 $[L_1+\frac{1}{i+1}, L_1+\frac{1}{i})$ or $(L_1-\frac{1}{i}, L_1-\frac{1}{i+1}]$

間 $\{a_n\}$ 中之點是可數。

令它們分別是

$a_{11}, a_{12}, a_{13} \cdots\cdots$
$a_{21}, a_{22}, a_{23} \cdots\cdots$
$\vdots$
$a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} \cdots\cdots$
$\vdots$

而 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots\cdots$ 仍是按它們在A中之先後排（∵ A Countable 令 $A = \{a_1, a_2, \cdots\cdots\}$

註：如果屬於某一個 $[L_1 + \frac{1}{m+1}, L_1 + \frac{1}{m})$ or $(L_1 - \frac{1}{m}, L_1 - \frac{1}{m+1}]$ 之點是有限多個，

我們可以一再重覆它們造成 Countable infinite.

如此一來我們取：

$\{a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{i1} \cdots\} \cup \{a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{i2}\} \cup \cdots\cdots$

爲 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的分化子數列，則這些子數列所構成的數列Collection 就是均勻收斂，且滿足前面所要求的聯集關係。

②如果A是一個可數點集合，且 $a \in A$ 是A的一個聚集點，則我們必然可以用A中的元素造成一個 sequence 來接近它。

證明：今把A限定實數之部份集合

A中屬於 $[a + \frac{1}{2}, a + \infty)$ or $(a - \infty, a - \frac{1}{2}]$ 之點是

$a_{11}, a_{12}, a_{13} \cdots\cdots$（按A中之先後排）

A中屬於 $[a + \frac{1}{3}, a + \frac{1}{2})$ or $(a - \frac{1}{2}, a - \frac{1}{3}]$ 之點是

$a_{21}, a_{22}, a_{23} \cdots\cdots$

A中屬於

$[a + \frac{1}{i+1}, a + \frac{1}{i})$ 或 $(a - \frac{1}{i}, a - \frac{1}{i+1}]$ 之點

是 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots\cdots$

則我們選 $\{a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41} \cdots a_{i1} \cdots\}$ 就是收斂於A之數切

**定義 1.** (presented by Apostol)

設 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個實數列，如果有一個實數U滿足以下的二個情形：

(1)對於任意給我們的一個正數 $\in$ 都存在一個正整數N，使得對於每一個 $n > N$ 都有 $a_n < U + \in$ 的性質。

(2)對於任意給定的正數 $\in$ 和m，都存在有某一個 $n > m$，而且 $a_n > U - \in$。

如果是這樣的話，我們稱U作 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的 limit superior 並且我們這樣的表示：

$$U = \limsup_{n \to \infty} a_n$$

這個定義到現在爲止還不是對於每一個實數列都派得上用場的，因爲光是(一)就要求著 $\{a_n\}$ 是有上界的，如果沒有上界怎麼辦呢？我們定義 $\limsup_{n \to \infty} a_n = +\infty$（如果 $\{a_n\}$ 無上界）。(二)如果 $\{a_n\}$ 雖然是有上界，但沒有下界，而且它也沒有如定義所言的有限limsup時，我們定義 $\limsup_{n \to \infty} a_n = -\infty$

以上對 limit superior 的定義算是完全了，現在我們定義limit inferior：$\liminf_{n \to \infty} a_n = -\limsup_{n \to \infty} (-a_n)$

由這個定義我們很顯然可以看出對於任何一個實數列它都具有limit superior 及 inferior（因爲這個定義討論了每一種可能的情形）。

**定義 2.**

設 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個數列，而

F是一個 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 子數列所成之 Collection 它們是均勻收斂的，而且F中之數列集合之聯集 $= \{a_n\}$ 且F中數列之 lim* 都存在於是我們定義

$\lim\sup a_n \equiv \sup{}^*\{\lim{}^* a_n \mid \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in F\}$

$\lim\inf a_n \equiv \inf{}^*\{\lim{}^* a_n \mid \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in F\}$

完成了這個定義，我們想問一問是否每一個實數列都都有 limit superior 和 limit inferior?

因爲對於每一個 $A \leq R^*$ 則 $\sup{}^* A$ 都存在（$\inf{}^* A$ 當然也存在）所以問題就落在F是否存在的問題上了！

現在我們就來證明F的存在性：

(1)如果 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂，我們就選取 $\{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\}$ 作F。

(2)如果 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散至（正負）無窮大，我們仍選取 $\{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\} = F$

(3)當 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 之 lim* 不存在時：

① $\{a_n\}$ 有界

② $\{a_n\}$ 無界

在①的情況下：

由 Bolzano-Weierstrass 定理，我們知道 $\{a_n\}$ 最少有一個聚集點，所以我們可以對應於每一個聚集點來造成一個子數列之 Collection

在②的情況下：

(a) $\{a_n\}$ 無上界而有下界

(b) $\{a_n\}$ 有上界而無下界

(c) $\{a_n\}$ 無上界亦無下界

(a) 令 $\inf\{a_n\}=L \because \lim^* a_n \neq +\infty$

所以我們可以找到一個M(1)使得它的左邊有無限多個點，這種M(1)是有下界的 $\because M(1)\geq L$

$\Rightarrow$ 存在一個最小的M(1)，使得L與M(1)之間只有一個聚集點，（這是可證明的，因爲：如果有一個以上的聚集點，則我們可以找到更小的M(1)）

現在我們問一問：

在M(1)右邊的點如果按它們在 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中之秩序來排，是否發散到無窮大呢？如果是，那就沒問題了，如果不是，我們仍可依前法找一個M(2)然後再問M(2)右邊之點是否發散至無窮大，當然這種步驟是可以繼續下去的，我們於是當然就可以找到一個數列之 Collection，它們不是發散至∞就是收斂至某一個數（當然這裡我省略了一些應用前面性質的討論）同理，在(b)的情況下我們可以作類似的討論，只是要往左邊進行就是了。

在(c)之情況下我們可綜合(a)(b)兩種情形來討論。

上面我們證明了一個實數列一定有 limit supeior及 limit inferior 之性質。

現在我們的工作就只剩下證明定義1與定義2之對等性了。

(i) 滿足定義2者，滿足定義1

如果U是子數列的極限所構成集合之 sup，則對於任何一個$\in>0$，必存在一個子極限大於$U-\in$，於是因爲極點一定是一個聚集點，所以必然存在無限多點在$U-\in$之右邊。

因爲：（所有的子極限）$\leq U$，所以$U+\epsilon\geq$（所有子極限$+\epsilon$），而這些子數列是均勻收斂的，所以存在一個N使得每一子數列在N項以後，都與其極限的距離小於$\epsilon$。

(ii) 滿足定義1者，滿足定義2

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個實數列，如果有一個finite number U滿足下列情形

① $\epsilon>0$， N s.t $n>N \Rightarrow a_n<U+\epsilon$

② $\epsilon>0$，$m>0$， $n>m$， s.t $a_n>U-\epsilon$

因爲 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 可以分出一個均勻收斂的子數列之collection F，

所以F中的數列的 $\lim^*$是小於無限大的。

（因由由①我們知道 $\{a_n\}$ 是有上界的，因此 $\sup^*\{\lim^* a_n \mid \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\in F\}$ 是存在的。

現在我們假設 $U\neq \sup^*\{\lim^* a_n \mid \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\in F\}$

則 (a) $U<\sup^*\{\lim^* a_n \mid \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\in F\}=S$

(b) $U>\sup^*\{\lim^* a_n \mid \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \because F\}$

討論(a)：假設 $|U-S|=r$ 則對於 $\epsilon<r/3$，我們取 $\epsilon'=r/4$，則必宜有一個F中的數列其極限要大於 $S-r/4$，（即對某一個L，$L>S-r/4$）則對於 $\epsilon''=r/4$，於是存在一個N，使得 $n>N \Rightarrow |a_n-L|<r/4$。

（註：$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收斂於L的子數列）

於是有無限多個 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中的項，它們與U之距離是要大於 $r/3$，就就與定義I之要求不合，所以U不可能小於S，同理U不可能大於S故U必等於S。）

上面我們只是驗證了 limit superior 存在而且是有限的情形，其他情形也同理可驗證，在此不另作說明。

前面討論了 limit superior及limit inferior之後，我們來用一用它們。

我們當然還記得由 integral test 我們可以知到 $\Sigma\frac{1}{n}$是發散的，而 $\Sigma\frac{1}{n^{1+\epsilon}}$，$\epsilon>0$，就是收斂的，而 $\Sigma\frac{1}{n\,l_n n}$ 是發散的，且 $\Sigma\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\in>0$是發散的。

從 $\Sigma\ 1/n^{1+\epsilon}$ 收斂

$\Sigma\ 1/n^{1-\epsilon}$ 發散

看來：

似乎，只要 $a_n\searrow 0$ 的速度比$\frac{1}{n}$快就暗示著$\Sigma$ $a_n$之收斂，但是其$\frac{1}{n\,l_n n}\searrow 0$之速度的確比$\frac{1}{n}$快

我們由 $\lim n\left(\frac{1}{n\,l_n n}\right)=0$就可以看出，但它又爲何發散呢！

因 $l_n\ n\to\infty$之速度比任何 $n^{\epsilon}\to\infty$ 爲慢只要 $\epsilon>0$。

所以我們如果想把 $l_n\ n$ 變成 $n^\epsilon$ 之形式，則在 n 相當大時 $\epsilon \to 0$。

這就給了我一個用 $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ 來作量度數列下降速度之標準從而判定此數列之斂散性！

Log test:

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個實數列且 $a_n > 0\ \forall n$

如果 limsup • $\log_n a_n^{-1} < 1 \Rightarrow \Sigma a_n$ 發散

（即 $\limsup \frac{l_n a_n^{-1}}{l_n n} < 1$）

$\liminf \quad \log_n a_n^{-1} > 1 \Rightarrow \Sigma a_n$ 收斂

如果 linif $\quad \log_n a_n^{-1} < 1 < \text{limsup} \log_n a_n^{-1}$

則我們無法得到結論。

但是如果 $\log_n a_n^{-1} = 1 \quad n > N$（N～某一個固定整數）

則 $\Sigma a_n$ 發散

證法類似 root test 從略。

*　*　*　*

名　詞　新　詮

理論物理學家　就是覺得作實驗和作苦工沒什麼不同的人。

實驗物理學家　就是作苦工時以爲自己是在作實驗的那種人。

*　*　*　*

△一個老師教了一學期的課最大的快樂乃是能在期末考時認識許多新同學。

△ 一個學生選了一門課最大的快樂乃是在他還沒有搞清楚老師長得什麼樣子時就已得到了七十分。