

國立清華大學 101 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：工程與系統科學系碩士班 乙組

核子工程與科學研究所 甲組（工程組）

工程與系統科學系碩士班 丙組

先進光學科技碩士學位學程 工程與系統科學組

考試科目（代碼）：工程數學（2601）（2701）（9801）

共 6 頁，第 1 頁 *請在【答案卷、卡】作答

1. Consider a given non-exact ordinary differential equation

$$p(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Find an integrating factor $F(x, y)$ so that $Fp(x, y)dx + FQ(x, y)dy = 0$ is an exact equation.

(10%)

2. Consider a homogeneous linear 2nd order ordinary differential equation (ODE)

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0$$

If y_1 is one solution of this ODE, you would find a second independent solution y_2 by reduction of order method, that is,

$$y_2 = uy_1$$

Prove $u(x) = \int U(x)dx$, and $U(x) = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}$

(10%)

國立清華大學 101 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：工程與系統科學系碩士班 乙組
核子工程與科學研究所 甲組（工程組）
工程與系統科學系碩士班 丙組
先進光學科技碩士學位學程 工程與系統科學組

考試科目（代碼）：工程數學（2601）（2701）（9801）

共 6 頁，第 2 頁 *請在【答案卷、卡】作答

3. Find the two linearly independent solutions of the following differential equation

$$x^2 y'' - 2xy' - (x^2 - 2)y(x) = 0$$

(10%)

4. Define the Laplace transform of $f(x)$ to be

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Solve the following differential equation for $y(t)$ using Laplace transform.

$$y'' + 2y' + 2y(t) = 1 + tU(t-2), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1,$$

where

$U(t-2)$ is the unit step function,

$$= \begin{cases} 0, & 0 < t < 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}$$

(10%)

國立清華大學 101 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：工程與系統科學系碩士班 乙組

核子工程與科學研究所 甲組 (工程組)

工程與系統科學系碩士班 丙組

先進光學科技碩士學位學程 工程與系統科學組

考試科目 (代碼)：工程數學 (2601) (2701) (9801)

共 6 頁，第 3 頁 *請在【答案卷、卡】作答

5. Define Fourier transform of $f(x)$ to be

$$F\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx.$$

(a) (5%) Find the Fourier transform of $f(x) = \exp(-a|x|)$, $a > 0$

(b) (5%) Apply Fourier transform to solve the differential equation

$$mu'' - cu' - ku = -Q\delta(x) \text{ for } -\infty < x < \infty$$

where m, c, k , and Q are positive constant.

The boundary condition is $u \rightarrow 0$ and $u' \rightarrow 0$ as $x \rightarrow \pm\infty$.

$$\text{The solution takes the form } u(x) = \begin{cases} u_0 \exp(-\Omega_+ x), & x > 0 \\ u_0 \exp(-\Omega_- x), & x < 0 \end{cases}.$$

Find u_0 , Ω_+ and Ω_- .

6. (a) (5%) Use Leibniz rule to find the first derivative of

$$\int_{-x}^{\sin x} \frac{dt}{t^3 + 1}.$$

(b) (5%) Find and classify all the local maxima, local minima, and saddles of the function

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1).$$

國立清華大學 101 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：工程與系統科學系碩士班 乙組

核子工程與科學研究所 甲組（工程組）

工程與系統科學系碩士班 丙組

先進光學科技碩士學位學程 工程與系統科學組

考試科目（代碼）：工程數學（2601）（2701）（9801）

共 6 頁，第 4 頁 *請在【答案卷、卡】作答

7.

(a) Let

$$f(x,y,z) = x^2 e^{-3yz}.$$

Compute the rate of change of f in the direction of unit vector

$$\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

at the point $(1,0,0)$. (7%)

(b) Find a unit vector normal to the surface given by

$$z = x^3 y^3 + x + 3$$

at the point $(0,0,3)$. (6%)

(c) Let $\mathbf{c}(t) = (\sin t, \cos t, t)$ with $0 \leq t \leq 2\pi$. Let vector field \mathbf{F} be defined by

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Compute the line integral \mathbf{F} along \mathbf{c} , $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. (7%)

國立清華大學 101 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：工程與系統科學系碩士班 乙組

核子工程與科學研究所 甲組 (工程組)

工程與系統科學系碩士班 丙組

先進光學科技碩士學位學程 工程與系統科學組

考試科目 (代碼)：工程數學 (2601) (2701) (9801)

共 6 頁，第 5 頁 *請在【答案卷、卡】作答

8. Solve Laplace's equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{for } 0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

subject to the boundary conditions

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = g(y) \quad \text{for } 0 < y < b,$$

and

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x) \quad \text{for } 0 < x < a.$$

(12%)

9. Use Cauchy's residue theorem to evaluate the integral

$$\oint_C \cot \pi z \, dz,$$

where C is the positively oriented rectangle defined by $x = \frac{1}{2}$, $x = \pi$,
 $y = -1$, $y = 1$.

(8%)

國立清華大學 101 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：工程與系統科學系碩士班 乙組

核子工程與科學研究所 甲組 (工程組)

工程與系統科學系碩士班 丙組

先進光學科技碩士學位學程 工程與系統科學組

考試科目 (代碼)：工程數學 (2601) (2701) (9801)

共 6 頁，第 6 頁 *請在【答案卷、卡】作答

參考資料：

Function $f(t)$	Laplace transform $F(s)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = [f(t)*g(t)]$	$F(s) G(s)$
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$f(t-a) U(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$t f(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s')ds'$