

國立清華大學 101 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：經濟學系

考試科目(代碼)：微積分與統計(4003)

共 3 頁, 第 1 頁, \*請在 [答案卷、卡] 作答

[Please answer all questions and show your work in details.]

1.a The utility function is:  $U(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$ .

a.1 (5%) Find the total differentiation of the utility function.

a.2 (5%) Find the price elasticity of demand for  $x_1$  if the price of  $x_1$  equals  $p_1$  and the income equals  $y$ .

1.b Concavity vs. convexity

b.1 (5%) Prove that every linear function from  $\mathbf{R}^1$  to  $\mathbf{R}^1$  is homogenous, concave and convex.

b.2 (5%) Is the function  $f(x, y) = 3x^2 - 3xy + y^2 - 5x + 10y + 1$  concave or convex?

2.a (5%) Suppose that the net investment flow is described by the equation  $I(t) = \frac{5}{\sqrt{t+1} \times (3+2\sqrt{t+1})}$  and that the initial capital stock at time  $t = 0$ , equals 0, what is the time path of capital  $K(t)$ ?

2.b (5%) Suppose the marginal cost of production equals  $(q+1)\ln(q+1)$  and there is no fixed cost, what is the total cost of producing  $q$  units of output?

3.a (5%) Use the Taylor approximation of *order two* to approximate  $f(x) = x^{3/2}$  at  $x = 8.9$ .

3.b (5%) Use the Taylor approximation of *order one* to approximate the Cobb-Douglas production function  $F(K, L) = K^{1/3}L^{2/3}$  at  $(K, L) = (1.9, 16.1)$ .

4.a (5%) Whether can the mean value theorem be applied to the following function on the interval,  $f(x) = |x|$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ ? If it cannot, explain why not. If it can, find all values in the interval which satisfy the theorem.

4.b (5%) Find  $N = N(t)$  for the Malthusian model,  $\frac{dN}{dt} = kN + \lambda$ , where  $k$  and  $\lambda$  are both constants.

國立清華大學命題紙

101 學年度 經濟學系 碩士班入學考試

科目 微積分與統計 科目代碼 4003 共 3 頁，第 2 頁 \*請在【答案卷卡】作答

- (5) (10 分) 考慮兩個獨立的隨機變數 (random variable)  $X_1$  和  $X_2$ ，其母體 (population) 之機率分配 (probability distribution)， $i = 1, 2$ :

x	2	6	9
$P(X_i = x)$	0.3	0.2	0.5

- (a) 求  $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$  之抽樣分配。
- (b) 求  $\bar{X}$  之期望值及變異數，其與母體之期望值及變異數有何關係？
- (6) (10 分) 在下列各小題中，請寫出虛無假設與對立假設各為何，以及該採左尾、右尾或雙尾檢定（並說出你的理由）：
- (a) 根據一項最新的調查結果顯示，公車族刷卡的比例已經由最初的 37% 降至 30%，公車聯營中心的人反駁說該調查不實，乘客刷卡的比例並未降低，並決定自行做一次調查。
- (b) 去年某市每月死於火災的平均人數為 6 人，為加強民眾的火災逃生知識，以及教導民眾如何辨識安全與不安全的公共場所，該市政府投下大筆經費做宣導短片在電視上播放。今年前六個月的每月火災的平均死亡人數為 5 人，標準差為 1 人，該市政府想做一統計檢定，以決定這筆經費花得值不值得。
- (c) 一家電視公司的節目部經理告訴某節目的製作人，該節目目前的收視率僅 6%。若該節目的收視率在未來三個月內沒有顯著的改進的話，就要停掉該節目，並決定以未來三個月該節目的收視率為樣本，做一統計檢定，以決定是否要停掉該節目。
- (d) 根據某報的調查，該市的民眾三個月前對某政府官員的施政滿意度評價為 5.5 分(滿分為 10 分)，後來該位政府官員提出一連串的改革措施，引起正反兩面極大的爭議，所以該報決定再做一次施政滿意度調查，看民眾對該位官員的評價是否有所變化。

(7) (15 分) 考慮以下簡單迴歸模型 (simple linear regression model) :

$$Y_i = \beta X_i + u_i,$$

其中， $Y_i$  為被解釋變數 (explained variable)， $X_i$  為非隨機解釋變數 (non-stochastic explanatory variable)， $u_i$  為干擾項 (disturbance term)。 假設  $E[u_i] = 0$ ； $E[u_i^2] = k > 0$ ； $E[u_i u_j] = 0$ ， $i \neq j$ 。 考慮以下三個無偏差估計量 (unbiased estimators) :

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) Y_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, \quad b_2 = \frac{Y_n - Y_1}{X_n - X_1}, \quad b_3 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2}.$$

- (a) 以上哪一個估計量較優？ (提示：你可以把估計量的變異數算出來，或衡量哪一個估計量更善用資訊。)
- (b) 你於 (a) 的選擇，是一個最小變異線性不偏估計量 (best linear unbiased estimator, BLUE) 嗎？

(8) (15 分) 考慮總體經濟學的一個模型如下：

(消費函數)  $C_i = \beta Y_i + u_i$

(國民收入賬戶)  $Y_i = C_i + I_i$

其中， $Y_i$  為國內生產總值 (GDP)， $C_i$  為消費，而  $I_i$  為投資。

- (a) 如某經濟學家說  $Y_i$  與  $C_i$  為內生變數 (endogenous variables)， $I_i$  為外生變數 (exogenous variable)，她的判斷標準應該是什麼？
- (b) 試解釋你如何估計參數  $\beta$ 。
- (c) 若國民收入賬戶如下： $Y_i = C_i + I_i + G_i$ ，其中  $G_i$  為政府支出(一個外生變數)。
- (i) 如何判斷  $G_i$  為一個外生變數？
- (ii) (b) 的答案有何不同？