QUELQUES REFLECTIONS SUR LA NATURE ET LE ROLE DES MATHEMATIQUES*

Par Jacques Hadamard

Membre de l'Institut, Paris.

Ce sujet est trop vaste pour qu'il puisse être question de le traiter dans cette courte causerie. Je ne puis que vous suggérer de lire les admirables volumes de Henri Poincaré, l'un des plus grands génies que la Science ait connus: *La Science et l'Hypothèse, la Valeur de la Science, Science et Méthode, Dernières Pensées.*

Aujourd'hui j'utiliserai seulement le fait que quelques uns des hommes qui ont pensé à la Science ont écrit des phrases restées proverbiales et j'en citerai une ou deux en les commentant.

On a dit que toute Science n'est qu'une langue bien faite. C'est, à mon avis, une erreur. Celui qui a dit cela était un mathématicien et ne pensait qu'aux Mathématiques. Quand Faraday découvrit l'induction, quand Pasteur nous apprit à vacciner contre la rage, ils ont trouvé tout autre chose qu'un langage.

Appliquée aux Mathématiques, je ne puis pas dire que cette définition soit complètement exacte, qu'elle en donne une idée complète; mais elle renferme une large part de vérité. Plus exactement encore, je dirais volontiers qu'elles sont une sorte de grand dictionnaire des synonymes. Les mots "équivalent", "il revient au même", "condition nécessaire et suffisante" reviennent à chaque instant dans les traités mathématiques. Dire que 3 fois 5 font 15, c'est dire que 3 fois 5 et 15 sont deux choses synonymes. D'après les cas d'égalité des triangles, dire que deux triangles ont leurs trois cotés égaux chacun à chacun ou dire qu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, sont deux énonciations synonymes.

---

*Conférence faite à l'Université Tsing-Hoa, le 26 Avril 1936, à l'occasion de son XXV.me anniversaire.

Tout cela ne nous donne pas au premier abord une grande admiration pour les Mathématiques. Imaginons une intelligence supérieure capable d'apercevoir d'un coup toutes les conséquences d'une énonciation, d'un fait déterminé quelconque. Un tel être n'aurait pas besoin de Mathématiques, au lieu que, s'il était complètement séparé du monde sensible, il ne pourrait pas découvrir le moindre fait physique ou biologique. Alors se pose la question: Comment se fait-il que, depuis 3000 ans et plus, beaucoup d'hommes éminents aient consacré leur vie à créer une langue,—même bien faite—, à trouver ce que, en style de logicien, on appelle des tautologies c'est à dire des manières plus ou moins compliquées d'exprimer que A est A.

Avons nous quelque chose à répondre à de telles objections?

D'abord, le langage mathématique a un premier avantage. C'en est un grand, pour nos pauvres esprits, que de posséder un langage qui n'a pas de locution pour exprimer les idées confuses.

Puis l'importance d'une langue bien faite va apparaître sous un autre point de vue que Poincaré a mis en évidence. Nous avons parlé de l'Etre fictif capable d'apercevoir toutes les conséquence d'un principe donné. Nous ne sommes pas cet Etre supérieur. Nous n'apercevons pas toutes les conséquences. Nous en apercevons certainement beaucoup, beaucoup plus que nous ne le croyons. Il y a un fait que l'observation psychologique nous montre avec certitude, c'est qu'il se fait constamment dans notre cerveau un énorme travail subconscient dont notre être conscient ne connait qu'une très faible partie. Partant de prémisses donnés, d'innombrables conséquences, d'innombrables combinaisons doivent être déduites dans ce travail que nous soupçonnons à peine, Mais la plupart de ces conséquences sont sans intérêt. Il se trouve que particulièrement chez un esprit apte à la découverte, seules celles qui peuvent être utiles atteignant le cerveau conscient: celles qui sont utiles, c'est à dire, comme le montre Poincaré, celles qui sont belles et harmonieuses. Suivant sa forte parole, découvrir, c'est choisir. Ceci vu, l'importance d'un mot convenablement créé est évidente. Un tel mot dirigera notre attention sur certaines classes de combinaisons. Ainsi la création des mots "ellipse" et "conique" a par elle seule été féconde, comme nous signalant une catégorie de propriétés qui semblaient être particulièrement remarquables et harmonieuses.

Au contraire,—et c'est encore une remarque de Poincaré—un mot mal choisi peut empêcher pour longtemps le progrès de la Science. L'homme qui a non pas créé, car c'est un vieux mot, mais employé dans la Science le mot "chaleur" a été extrêmement nuisible, car avec ce mot s'est introduit l'idée fausse que la chaleur était indestructible, idée qui a régné dans le monde des savants pendant plusieurs siècles.

Demandons nous ensuite comment il se fait que les Mathématiques ne soient pas pour nous une suite de tautologies complètement insignifiante. Ce qui les sauve de ce reproche, et qui est la raison de l'intérêt que nous leur portons, est leur généralité. Dire que 3 fois 5 est égal à 5 fois 3 n'est pas un fait intéressant pour le mathématicien; mais dire que 3 fois 5 est égal à 5 fois 3 *et qu'il en serait de même en remplacant 3 et 5 par n'importe quels autres nombres* vaut la peine qu'on se donne pour le démontrer. Un énoncé mathématique est un énoncé qui prévoit d'un coup un grand nombre de circonstances possibles; et nous voici conduits à un autre mot célèbre, dû au philosophe anglais Bertrand Russell :

"Les Mathématiques sont la Science où l'on ne sait jamais de quoi l'on parle, ni si ce que l'on dit est vrai."

Quelques paradoxales et absurdes que puissent paraître ces deux assertions, elles expriment l'absolue vérité, et on peut s'en rendre compte sur le moindre problème d'Arithmétique élémentaire.

On ne sait pas de quoi l'on parle. Supposons que nous demandions à un enfant: Un homme a acheté 6 yards de soie à 2 dollars le yard; combien devra-t-il payer? A-t-on besoin de savoir ce que c'est que la soie pour répondre? Au lieu de yards de soie, on aurait pu parler de kilos de coprah: le problème aurait été le même, et l'enfant totalement ignorant de ce qu'est le coprah n'aurait pas été plus embarrassé pour le résoudre. En réalité, il n'y a que les nombres 6 et 2 qui comptent. C'est l'exemple le plus simple du procédé d'abstraction mathématique, et ce procédé est une des grandes raisons pour lesquelles les Mathématiques se sont montrées puissantes.

Parmi les nombreuses circonstances où il a été utile, mentionnons en deux. Quand on a bâti la théorie de la conductibilité thermique, celle de l'Electricité et celle du mouvement des liquides incompressibles, il est apparu que l'équation qui régit le problème est la même dans tous ces cas. Or cette seule circonstance a suffi pour permettre d'importants progrès de ces théories car tout fait aperçu par le raisonnement ou par le bon sens et l'observation concernant un de ces trois phénomènes a pu être immédiatement transporté aux deux autres et perfectionner nos connaissances à leur sujet.

L'autre exemple est plus frappant encore: Les planètes tournent autour du soleil et décrivent autour de lui des orbites plus ou moins circulaires. Ceci fut connu dès l'Antiquité et plus complètement au XVII_e siècle où Kepler découvrit qu'il s'agissait d'ellipses. Et grâce à la découverte de Newton, l'étude de ces mouvements fut ramenée à des principes mathématiques. C'est seulement à notre époque, au contraire, que les physiciens ont pu commencer à rechercher quelle pouvait être la structure des atomes. Quelle différence, quel abime il semble y avoir entre les deux sujets! Notre distance au soleil est, vous le savez, d'environ 150 millions de kilomètres, et notre terre est une des planètes les plus rapprochées, pendant que les grandeurs des atomes se comptent avec une unité qui s'appelle l'angström et qui est la dix millionième partie d'un millimètre. Dire qu'ils sont microscopiques serait exagérer beaucoup leur grandeur, car aucun microscope ne peut et nous avons des raisons de croire que jamais aucun microscope ne pourra les faire apercevoir. Et cependant on a été conduit à se figurer un atome sous forme d'un système analogue aux planètes, je veux dire d'un système de particules circulant autour d'une particule centrale un peu plus grosse, et les études considérables qui avaient été faites sur les systèmes planétaires ont immédiatement permis d'éclairer l'étude des atomes.

Mais plus récemment, c'est l'inverse qui a eu lieu. Notre système solaire, si énorme qu'il nous paraisse, ne constitue pas tout l'Univers. D'autres soleils, souvent même plus gros que le notre et en nombre énorme, les étoiles fixes, peuplent l'infini de l'espace. Tous ces systèmes sont en mouvement et quoique nous puissions être à cet égard rassurés pour de longs siècles, ils ne peuvent manquer, à la longue, de se rencontrer exactement ou approximativement. Il est à peine douteux qu'ils ne soient rencontrés bien des fois dans l'infini du passé; et nous avons toute raison de croire qu'un certain équilibre dans leur distribution a été atteint grâce à ces rencontres. Or., si nous avons pu raisonner sur cet équilibre, c'est parce que, entre temps, une théorie physique était née, d'après laquelle un gaz qui nous parait immobile est constitué, en réalité, par un nombre de molécules se mouvant avec une trés grande vitesse et s'entrechoquant constamment. Grâce à ces chocs, un équilibre général s'établit dans toute la masse. Comparons ce phénomène au précédent. Les ordres de grandeur diffèrent encore plus que tout à l'heure. Nous avons vu que les phénomènes moléculaires se mesurent à l'aide de *l'angström*, le dix millionième d'un millimètre. En astronomie stellaire, l'unité que l'on est obligé d'employer est le *parsec* qui est plus de 400 000 fois la distance de 150 millions de kilomètres dont nous avons parlé. Et cependant les mêmes raisonnements mathématiques seront valables pour l'un des phénomènes et pour l'auture. Ainsi, le mathématicien raisonnera sans savoir s'il parle de mondes ou de minuscules atomes.

Passons à la seconde partie de l'énoncé de Russell. En Mathématiques *vous ne savez jamais si ce que vous dites est vrai.*

Pour le voir, vous n'avez qu' à penser au même problème d'arithmètique pour enfants. Un homme a acheté 6 yards d'étoffe à 2 dollars le yard, Où est cet homme? Etes vous sûr qu'il ait existé ? Au lieu de soie à 2 dollars le yard, vous auriez aussi bien pu parler de soie à 2 cents, ou à 2 000 dollars. Et les enfants d'Ecole primaire auraient fait le problème sans plus d'hésitation.

C'est même un point de l'enseignement primaire qui exigerait beaucoup de surveillance. On dit quelque fois que l'abus des Mathématiques fausse l'esprit. Je dirais volontiers que peu de Mathématiques est plus dangereux à cet égard que beaucoup de Mathématiques, et peu d'enseignements sont peut être plus dangereux que l'Arithmétique d'Ecole primaire. Le problème suivant a été proposé par un de nos mathématiciens qui avait le sens de l'humour: "Etant donné que 10 hommes ont mis deux jours, à raison de 10 heures par jour, pour creuser un fossé, combien faudrait-il de temps si on en mettait 100 000?" Je crains que beaucoup d'enfants, si on leur pose ce problème, ne le traitent immédiatement et n'écrivent sans sourciller le résultat, quelque chose comme 7 secondes! Combien peu d'entre eux se demanderaient où l'on logerait, dans ce fossé, les 100 000 hommes avec leurs 100 000 bêches ?

Je ne suis pas sûr non plus qu'il n'arrive pas de demander, étant donné le temps mis pour creuser un trou d'un yard de profondeur, combien il en faudrait pour creuser un trou, profond de 2 yards, de sorte que l'enfant est obligé d'admettre qu'il faut deux fois plus de temps dans le second cas que dans le premier. A ce compte, un homme qui aurait besoin d'un jour pour creuser avec sa beche un trou de 1 yard n'en demanderait que 200 pour creuser à une profondeur de 200 yards. En réalité, c'est à quoi il n'arriverait jamais en y consacrant toute sa vie.

Dans les applications des Mathématiques, le fait est qu'il faut aller plus loin que Russell, et dire que le mathématicien, le plus souvent, sait que ce qu'il dit *n'est pas vrai*. On a, par exemple, appliqué le calcul au mouvement des projectiles d'artillerie. Pour cela, on est obligé d'admettre que l'on connait exactement la vitesse initiale, et on ne la connait pas bien; que l'obus à sa sortie est bien dans l'axe du canon et il ne l'est pas; que l'on connait exactement les lois de la résistance de l'air; qu'il n'y a pas de vent, ou que le vent est régulier; etc.

Les données approchées sont le cas dans pratiquement tous les problèmes de Mathématiques appliquées. Un fait paradoxal est qu'il est souvent tres utile de commencer par raisonner sur des points de départ notoirement inexacts. Nous avons mentionné les lois de Kepler dont la première assujettit les planètes à décrire autour du soleil des ellipses. Ces lois furent le point de départ utilisé par Newton pour découvrir sa loi de gravitation universelle. Or, en réalité, les lois de Kepler ne sont pas exactes; les orbites des planètes ne sont pas tout à fait des ellipses; elles sont très proches d'ellipses, mais avec de petites irrégularités trés compliquées. Si Newton avait porté son attention sur cette dernière circonstance, il n'aurait pas pu trouver sa loi. Et cependant ces irrégularités, ces perturbations ne signifient nullement que la loi de gravitation soit inexacte; elles résultent, au contraire, nécessairement de cette loi. Elles ont lieu parce que chaque planète est soumise, non seulement à l'action de Soleil, mais à celle de toutes les autre planètes. Ainsi la vérité n'aurait pas été apérçue si, au lieu de raisonner sur des mouvements approchés, Newton avait raisonné sur les mouvements exacts.

Savoir jusqu' à quel point les hypothèses sur lesquelles repose le raisonnement sont, sinon exactes, du moins légitimes, c'est dans l'usage des Mathématiques, l'une des principales formes de cet esprit scientifique qui doit gouverner toute notre activité intellectuelle.