

國 立 清 華 大 學 命 題 紙

98 學年度 統計學研究所 碩士班入學考試

科目 機率論 科目代碼 0102 共 2 頁第 1 頁 *請在【答案卷】內作答

本試卷共十二題填充題，其中 1~10 題，每題 8 分，11~12 題，每題 10 分，只須將最後答案清楚填入答案紙中，不須列出計算及導證過程。依題號(直式)填入答案於第一頁如下：

1. (答案)
2. (答案)
- : :
- : :
- : :
12. (答案)

1. 若一隨機變數 X 之動差(moments)為 $E(X^r) = 0.8$, $r = 1, 2, 3, \dots$, 則 X 之變異數為____
(1)_____。
2. 若 $f(x, y) = d(4x + 2y + 1)$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$ (其中 d 為一常數), 代表隨機變數 X 和 Y 之聯合機率密度函數(joint probability density function), 則 $P_r(X + Y < 1)$ 之值為____(2)_____。
3. 投擲一對點數分別為 1, 2, 3 和 4 的四面均勻骰子, 並且決定其點數和, 若事件 A 代表兩個骰子的點數和為 3, 而事件 B 代表兩個骰子的點數和為 3 或 5。假設這對骰子可以被獨立地投擲無窮多次, 則先看到點數和為 3 點, 再看到點數和為 5 點之機率為____(3)_____。
4. 子宮頸抹片檢查是檢查早期子宮頸癌的一個方法。對於婦女有子宮頸癌, 這種方法約有 16%的假陰性(false negatives, 即有病判斷成沒病); 然而對於婦女沒有子宮頸癌, 這種方法約有 19%的假陽性(false positives, 即沒病判斷成有病)。在美國大約每 10 萬婦女中 8 人有子宮頸癌, 試問在子宮頸抹片檢測為陽性反應之條件下, 得到子宮頸癌之機率為____(4)_____。(由這個例子我們可以清楚看出美國婦女值不值得做子宮頸抹片檢查!)
5. 若 x_1, x_2, \dots, x_{900} 代表某大學 900 位新生第一次期中考之微積分成績, 若 $\bar{x} = \sum_{i=1}^{900} x_i / 900 = 83$
且 $v = \sum_{i=1}^{900} (x_i - \bar{x})^2 / 900 = 36$, 則至少有____(5)_____位學生之成績是大於 71 且小於 95。(提示: 利用 Chebyshev's inequality)
6. 令隨機變數 Y 具有自由度(degree of freedom)為 n 之卡方分佈, 則 $\sqrt{Y} - \sqrt{n}$ 之極限分佈
(limiting distribution)為____(6)_____。

國 立 清 華 大 學 命 題 紙

98 學年度 統計學研究所 碩士班入學考試

科目 機率論 科目代碼 0102 共 2 頁第 2 頁 *請在【答案卷】內作答

7. 設 $Y_n = \text{maximum of } X_1, X_2, \dots, X_n$, 其中 X_1, X_2, \dots, X_n 為一組從 $U(0, \theta)$, $0 < \theta < \infty$, 所取出之隨機樣本。若 Y_n 分佈收斂(converge in distribution)到隨機變數 Y , 則 Y 之分佈函數(distribution function)為 (7)。
8. 假設有三隻狗隨機分佈在一公里長的路上, 則任意二隻狗之間的距離大於 c ($c \leq \frac{1}{2}$) 公里之機率為 (8)。(提示: 若 Y_i 表示第 i 隻狗的位置, $1 \leq i \leq 3$, 則所求機率之事件為 $Y_{(3)} > Y_{(2)} + c$ 且 $Y_{(2)} > Y_{(1)} + c$, 其中 $Y_{(1)} < Y_{(2)} < Y_{(3)}$ 代表 Y_1, Y_2, Y_3 之有序統計量(order statistics))
9. 設 Y_1, Y_2, \dots 為獨立且具有相同分佈的隨機變數序列, 而 N 為正整數的隨機變數。若 Y_1, Y_2, \dots 和 N 為統計獨立, 則 $\sum_{i=1}^N Y_i$ 之期望值為 (9)。
10. 若 A 投擲 m 個均勻銅板, B 投擲 $m+1$ 個均勻銅板, 則 A 得正面的個數較 B 為少的機率為 (10)。
11. 若 $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ 代表隨機變數 X_1, X_2, \dots, X_n 之有序統計量(order statistics), 其中 X_1, X_2, \dots, X_n 為從分佈函數 $F(x)$ 和機率密度函數(probability density function) $f(x) = F'(x)$ 所取出之一組隨機樣本。若 $F(\xi_p) = p$ 且 $f(\xi_p) > 0$, 考慮有序統計量 $Y_{[np]}$, 其中 $[np]$ 代表不大於 np 之最大整數, 則 $Y_{[np]}$ 之近似分佈(approximate distribution)為 (11)。
12. 設隨機變數 X 和 Y 之聯合機率質量函數(probability mass function)為 $f(x, y) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_1^x p_2^y p_3^{n-x-y}$, 其中 $n, p_1, p_2, p_3 = 1 - p_1 - p_2$ 為參數, 且 x 和 y 為非負整數滿足 $x + y \leq n$ 。若 ρ 代表 X 和 Y 之相關係數(correlation coefficient), 則 $\rho =$ (12)。