

國立清華大學命題紙

99 學年度 統計學研究所 碩士班入學考試

\*請在【答案卷卡】作答

科目 機率論 科目代碼 0102 共 2 頁第 1 頁

答題時請註明清楚空格編號，並依序作答。

1.  $\Theta$  為一均勻分佈  $u(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ，令  $Y = \tan \Theta$ ，試求

(a)  $Y$  之機率密度函數 (pdf) 為 \_\_\_\_\_ (1) . (5 分)

(b)  $E(|Y|) =$  \_\_\_\_\_ (2) . (5 分)

2. 假設某海龜的長 ( $X$ )、寬 ( $Y$ )、高 ( $Z$ ) 服從下列三元常態分佈，(單位 cm)

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \sim N \left( \begin{pmatrix} 4.7 \\ 4.4 \\ 3.7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\sigma_X)^2 & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{YX} & (\sigma_Y)^2 & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & (\sigma_Z)^2 \end{pmatrix} \right)$$

其中

$$\sigma_X = 1.0 \times 10^{-1}, \quad \sigma_Y = 0.8 \times 10^{-1}, \quad \sigma_Z = 0.9 \times 10^{-1}, \quad \sigma_{XY} = \sigma_{XZ} = 0.72 \times 10^{-2}, \quad \sigma_{YZ} = 0.$$

試求

(a)  $E(X|Y = 4.5) =$  \_\_\_\_\_ (3) . (5 分)

(b)  $Var(X|Y = 4.5) =$  \_\_\_\_\_ (4) . (5 分)

並利用上式之結果，計算下列

(c)  $E(X|Y = 4.5, Z = 3.8) =$  \_\_\_\_\_ (5) . (5 分)

(d)  $Var(X|Y = 4.5, Z = 3.8) =$  \_\_\_\_\_ (6) . (5 分)

(e) 令  $g(Y, Z) = E(X|Y, Z)$ ，試求  $E(g(Y, Z)) =$  \_\_\_\_\_ (7) . (5 分)

3. 電話費率的計算公式如下：

3 分鐘內計費 4 元，3 分鐘以上，每增加 1 分鐘需增加 2 元 (若未滿 1 分鐘以 1 分鐘計算之)。若通話時間 ( $X$ ) 服從指數分佈，且其平均 (期望) 時間為 5 分鐘，令  $Y$  表示打電話所需的費用，

(a) 將  $Y$  與  $X$  的關係式列出 \_\_\_\_\_ (8) . (5 分)

(b) 試求  $\frac{E(Y) - 4}{2} =$  \_\_\_\_\_ (9) . (10 分)

國立清華大學命題紙

99 學年度 統計學研究所 碩士班入學考試

\*請在【答案卷卡】作答

科目 機率論 科目代碼 0102 共 2 頁第 2 頁

4. 9 個人在一樓搭乘電梯前往二至八樓，假設每一樓層至少有一人下電梯，且沒有其它人再上電梯的情況下，試問共有多少種搭乘電梯之組合 (10)。 (10 分)

5. 令  $Y \sim N(\mu; \sigma^2)$  且已知  $h(y) = \frac{\phi(y)}{1 - \Phi(y)}$ ，其中  $\phi(\cdot)$  及  $\Phi(\cdot)$  分別為  $N(0; 1)$  之 pdf 及 cdf。

試利用  $h(\cdot)$  來表示  $E(Y|Y \geq L) = \underline{(11)}$ 。 (10 分)

6.  $X_1, X_2, X_3$  為三個互相獨立之指數分佈，已知  $E(X_i) = i, i = 1, 2, 3$ ，試計算  $P(X_1 > X_2 > X_3) = \underline{(12)}$ 。 (10 分)

7. 假設 4 小時之內共有  $n$  個顧客隨機 (random) 到達郵局，令  $(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)})$  為此

$n$  個顧客到達郵局的時間之有序統計量 (order statistics)，且  $R = X_{(n)} - X_{(1)}$

(a) 試求  $R$  之分佈：(13)。 (10 分)

(b) 試求  $E(R) = \underline{(14)}$ 。 (5 分)

(c) 試求  $Var(R) = \underline{(15)}$ 。 (5 分)